# Algèbre linéaire : Partiel

## Chapitre I : Nombre complex

- Soit $z = a + ib$ $z' = a' + ib$

  $z + z' = (a + a') + i(b + b')$

  $zz' = (aa' - bb') + i(ab' + a'b)$

  si $z \neq 0$ $z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{a+ib} = \frac{a-ib}{a^2+b^2}$

  $z$ réel $\Leftrightarrow \mathrm{Im}(z) = 0$

  $z$ imaginaire $\Leftrightarrow \mathrm{Re}(z) = 0$

- $\bar{z} = a - ib$

  $\overline{z+z'} = \bar{z} + \bar{z}$

  $\overline{zz'} = \bar{z} \times \bar{z}'$

  $\mathrm{Re}\, z = \frac{z + \bar{z}}{2}$

  $\mathrm{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$

$$\boxed{\begin{array}{l} z \text{ réel} \Leftrightarrow z = \bar{z} \\ z \text{ imaginaire} \Leftrightarrow z = -\bar{z} \end{array}}$$

- Module de $|z| = \sqrt{\mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2}$

  $|z|^2 = z \times \bar{z}$

  $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$

  $|z \times z'| = |z| \times |z'|$

  $\big||z| - |z'|\big| \leqslant |z + z'| \leqslant |z| + |z'|$

- Distance entre $z$ et $z'$ $= |z - z'|$

- $z = a + ib = Re^{i\theta}$ avec $R = |z|$ $\cos(\theta) = \frac{a}{R}$ $\sin\theta = \frac{b}{R}$

  $\overline{Re^{i\theta}} = Re^{-i\theta}$

- $\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ $\sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$

- $(e^{ix} + e^{iy})^n = \left(e^{i\frac{x+y}{2}}\left(e^{i\frac{x-y}{2}} + e^{-i\left(\frac{x-y}{2}\right)}\right)\right)^n = e^{i\frac{x+y}{2}n}\left(2\cos\frac{x-y}{2}\right)^n$

- $(\cos(\theta) + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$

- Les solutions de $z^n = 1$ sont de la forme $U_n = e^{\frac{2iK\pi}{n}}$ $\quad 0 < K < n-1$

  $\sum_{K=0}^{n} U_K = 0$

- solution de $z^n = Z$ avec $Z = Re^{i\theta}$ sont de la forme $z_n = \sqrt[n]{R}\, e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}}$ $\quad 0 < k < n-1$

- resolution des equation du type $z_1 z^2 + z_2 z + z_3 = 0$ avec $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$

  $\Delta = z_2^2 - 4z_1z_3$

  si $\Delta = 0 \Rightarrow z_0 = \frac{-b}{2a}$

  si $\Delta \neq 0$ on trouve $\delta = a + ib$ tel que $\delta^2 = \Delta$

  ainsi : $z_1 = \frac{-z_2 - \delta}{2z_1}$ $\quad z_2 = \frac{-z_2 + \delta}{2z_1}$

- → translation $z'$ de $z$ par $\vec{u}(b)$ : $z' = z + b$

  → homothetie de centre $\Omega(w)$ et de rapport $h$ : $z' - w = h(z - w)$

  → rotation de centre $\Omega(w)$ et d'angle $\theta \in \mathbb{R}$ $\quad z' - w = e^{i\theta}(z - w)$

  → symetrie de centre $O$ $\quad z' = -z$

  d'axe $(Ox)$ $\quad z' = \bar{z}$

  d'axe $(Oy)$ $\quad z' = -\bar{z}$

  → similitude de centre $\Omega(w)$, d'angle $\theta$ et de rapport $K$

  $$z' - w = Ke^{i\theta}(z - w)$$

- Soit $f : z \to az + b$

  si $a \neq 1$ $\exists! w \in \mathbb{C}$ tel que $w = \frac{b}{1-a}$ ainsi $f$ est une similitude de centre $\Omega(w)$ d'angle $\arg(a)$ et de rapport $|a|$

# Chapitre II : Structure algébrique

- $(E,*)$ est un groupe si : $*$ est associative
  $*$ admet un element neutre
  tout element est inversible pour $*$
- Si le groupe est commutatif on dit qu'il est abelien
- $H$ est un sous groupe de $E$ si : $e \in H$
  $\forall x, y \in H \quad x * y^{-1} \in H$

- $f$ est un morphisme de $(E,*)$ dans $(E',\circ)$ si $\forall x,y \in E \quad f(x*y) = f(x) \circ f(y)$

  si $f$ est un morphisme $f(e) = e'$
  $f(x^{-1}) = f(x)^{-1}$

  Endomorphisme : morphisme de $E \to E$
  isomorphisme : morphisme bijectif
  - injectif : $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$
  - surjectif : $\forall y, \exists x$ tel que $f^{-1}(y) = x$

- $Im(f) = \{ f(x), x \in E \} = f(E)$
  $Ker(f) = \{ x \in E, f(x) = e' \} = f^{-1}(e')$

$f$ est injectif $\Leftrightarrow Ker(f) = \{e\}$
$f$ est surjectif $\Leftrightarrow Im(f) = E'$

- $(A,+,\cdot)$ est un anneau si : $(A,+)$ est un groupe
  - $\cdot$ est associative
  - $\cdot$ est distributive %. à la loi $+$

  (si $\cdot$ admet un element neutre c'est un anneau unitaire)
- $A$ est un anneau integre si $0$ est le seul diviseur de $0 \Leftrightarrow xy = 0$ alors $x = 0$ / $y = 0$
  et s'il est commutatif pour $\cdot$

- $B$ est un sous anneau de $A$ si : $B$ est un sous groupe de $(A,+)$
  $B$ est stable pour la loi $\cdot$
  (si $\cdot$ admet un element neutre c'est un sous anneau unitaire)
- $f$ est un morphisme d'anneau si : $f(x+y) = f(x) + f(y)$
  $f(xy) = f(x) f(y)$
  $f(1_A) = 1_{A'}$

- Un corps est un anneau dans lequel tout element est inversible pour $\cdot$

- Sous corps = Sous anneau + Tout element est inversible.

# Chapitre III : Espace vectoriel

- $E$ est un K-ev si il est muni des 2 loi $+$ et $\cdot$ tel que :

$+ : E \times E \to E$
$(u, v) \to u + v$
avec $(E, +)$ est un groupe abelien

$\cdot ; K \times E \to E$
$(\lambda, u) \to \lambda u$
- est associative $(\lambda \mu) x = \lambda(\mu x)$
- admet un element neutre : $\forall u \quad 1u = u$
- distributive : $(\lambda + \mu) v = \lambda v + \mu v$

- $F$ est un Sev de $K$ ssi : $\boxed{F \neq \emptyset \quad \forall \alpha, \beta \in K, \forall u, v \in F \ \alpha u + \beta v \in F}$

- $E = Vect(X)$ avec $X$ une famille de vecteur $\Leftrightarrow$ La combinaison lineaire des Vecteurs de $X$ engendre tous les element de $E$
- Si $E = Vect(X)$ on dit que $X$ est une famille generatrice de $E$
- $F + G = Vect(F \cup G)$ si $u \in F + G$ alors $\exists x \in F$ et $y \in G$ tel que $u = x + y$
- $F \oplus G = E$ il s'agit d'une somme direct alors $F \cap G = \{\emptyset\}$ et on dit que $F$ est de supplementaire de $G$ dans $E$.
- $u \in F \oplus G \Rightarrow \exists!\, x \in F$ et $\exists!\, y \in G$ tel que $u = x + y$.
- $\{u_1, \dots, u_p\}$ est une famille libre si $\alpha u_1 + \beta u_2 \dots \gamma u_p = 0 \Leftrightarrow \alpha = \beta = \dots = \gamma = 0$
- Une famille qui n'est pas libre est liée
- $\{u_1, u_2, \dots u_p\}$ est une base de $E$ ssi c'est une famille generatrice de $E$ et elle est libre
  $\hookrightarrow \boxed{E = Vect(u_1 \dots u_p) \text{ et } \alpha u_1 + \beta u_2 \dots \gamma u_p = 0 \Rightarrow \alpha = \beta = \dots = \gamma = 0}$

- Toute famille generatrice contient au moins une base
- Toute famille libre peut etre completer en une base
- la dimension d'une Base $B$ ($\dim_B$) est egale à son cardinal
- Soit $E$ un K-ev de dimension $n$
  1) Une famille libre a au plus $n$ elements, si il a $n$ element c'est base
  2) Une famille generatrice a au moins $n$ elements, si il a $n$ element c'est une base
- $\boxed{\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim F \cap G}$

- $\dim F \oplus G = \dim F + \dim G$
- $F + G = E \Leftrightarrow$ $\cdot\ F + G \subset E$ $\cdot\ \dim(F+G) = \dim E$