Trigonalisation.

-Un endomorphisme est trigonalisable s'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est triangulaire supérieur.
-A (matrice) est trigonalisable si elle est semblables à une matrice triangulaire supérieur.
-u est trigonalisable ssi son polynôme caractéristique est scindé sur K (en particulier un endomorphisme d'un C-ev)

$$T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \delta & \delta_1 \\ 0 & \lambda_2 & \delta_2 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \lambda_i\text{:valeurs propres} \\ u \in L(\mathrm{E}) \end{matrix}$$

Sous espace caractéristique $F_\lambda(u) = (u - \lambda\, id_E)^m$ avec $u \in L(E)$ (Les propriétés concernant les sous espaces caractéristiques associées aux endomorphismes sont pour ceux associés aux matrices et réciproquement).
-$E_\lambda(u) \subset F_\lambda(\mathrm{u})$ $F_\lambda(u)$ est stable par u.
-E est la somme directe sous espaces caractéristiques de u : $E = \bigoplus F_{\lambda_i}(u)$ $(1 < i < n)$
-La dimension de chaque sous espaces caractéristiques $F_{\lambda_i}(u)$ est égale à la multiplicité de λ_i
-$u \in L(E)$ tel que X_u sont scindé, $\exists$ une base de E dans laquelle u est représenté par une matrice triangulaire supérieur (par blocks).

PRATIQUE DE LA DIAGONALISATION !

-Trouver le polynôme caractéristique. ($P(x) = \det(\mathrm{A} - \lambda\,.\,\mathrm{I})$)
-Factoriser le polynôme caractéristique. (Pour trouver les valeurs propres λ_i)
-Compléter cette base en une base de E
-Trouver P et P^{-1} (Résoudre $AX_i = \lambda_i X_i$)

Décomposition de Dunford.

$f \in L(E)$ tel que Xf soit scindé.
$\exists!$ couple $(g\,,h) \in L(E)^2$ tel que :
1- g est diagonalisable et h est nilpotent.
2- g et h commutent
3- $f = g + h$ (h est nilpotent ssi $\exists n \in N\,, h^n = 0$)

Suite récurrente.

$$(S)\begin{cases} U_{n+1} = \alpha_1 U_n + \beta V_n + \gamma_1 W_n \\ V_{n+1} = \alpha_1 U_n + \beta V_n + \gamma_1 W_n \\ W_{n+1} = \alpha_1 U_n + \beta V_n + \gamma_1 W_n \end{cases} \qquad (S) \leftrightarrow AX_n = X_{n+1} \qquad X_n = \begin{pmatrix} U_n \\ V_n \\ W_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_n \\ V_n \\ W_n \end{pmatrix} = \begin{matrix} U_{n+1} \\ V_{n+1} \\ W_{n+1} \end{matrix} \qquad X_n = A.X_{n-1}$$

Et si A est diagonalisable $A^n = P.D^n P^{-1}$ et $D^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^n & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^n \end{pmatrix}$