# Chapitre I : Les nombres complexes

## I] Notation cartésienne (ou algébrique)

. Soit $z$ un nombre complexe :

$z = a + ib$ avec $i^2 = -1$

a est la partie reel de $z$ noté $Re(z)$

b est la partie imaginaire de $z$ noté $Im(z)$

• Soient $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$

↳ $z + z' = (a + a') + i(b + b')$

↳ $zz' = (aa' - bb') + i(ab' + a'b)$

Si $z \neq 0 \Rightarrow z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{x^2+y^2}$

• $z$ reel $\Leftrightarrow Im(z) = 0$

$z$ imaginaire $\Leftrightarrow Re(z) = 0$

• Propriété : • $z_1 = z_2 \Leftrightarrow Re(z_1) = Re(z_2)$ et $Im(z_1) = Im(z_2)$

• $Re(\lambda z_1) = \lambda Re(z_1)$

$Im(\lambda z_1) = \lambda Im(z_1)$

• $Re(z_1 + z_2) = Re(z_1) + Re(z_2)$

$Im(z_1 + z_2) = Im(z_1) + Im(z_2)$

# $Re(z_1 z_2) \neq Re(z_1) \times Re(z_2)$

$Im(z_1 z_2) \neq Im(z_1) \times Im(z_2)$

• Representation geometrique

• On dit que M est d'affixe $z$ noté $M(z)$ si le coordonné de M sont $Re(z)$ et $Im(z)$

- le vecteur $\vec{u}(a,b)$ est appelé vecteur image de $z = a + ib$ ($z$ est l'affixe de $\vec{u}$)

ex : $\left.\begin{array}{l} A \to z_A = a + ib \\ B \to z_B = x + iy \end{array}\right\} \vec{AB} \to z_{\vec{AB}} = (x - a) + i(y - b) \quad \vec{AB}\begin{pmatrix} x - a \\ y - b \end{pmatrix}$

- Soient $\vec{u}$ d'affixe $z_{\vec{u}}$ et $\vec{v}$ d'affixe $z_{\vec{v}}$, alors le vecteur $\lambda \vec{u} + \mu \vec{v}$ a pour affixe $\lambda z_{\vec{u}} + \mu z_{\vec{v}}$.

• Conjugué et module d'un nombre complexe

• Si $z = a + ib \Rightarrow \bar{z} = a - ib$

• $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'}$ ainsi $\overline{nz} = n\bar{z}$

• $\overline{zz'} = \bar{z} \times \bar{z'}$

• $\bar{\bar{z}} = z$

• $Re(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$

• $Im(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$

• $z$ reel $\Leftrightarrow z = \bar{z}$

• $z$ imaginaire pur $\Leftrightarrow z = -\bar{z}$

MOUVEMENT DE L'ESIB SOLIDAIRE

- $|z|$ est le module de $z$, $|z|$ est un réel tel que
$$|z| = \sqrt{Re(z)^2 + Im(z)^2}$$
Concrètement, $|z|$ est la longueur du segment $[OM]$ ou $M$ est l'image de $z$

**propriété**
- $|z|^2 = z \times \bar{z}$
- $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$
- $|\bar{z}| = |z|$
- $|z \times z'| = |z||z'|$ et $|z^n| = |z|^n$ $\forall n \in \mathbb{N}$ ceci reste valable dans $\mathbb{Z}$ si $z = 0$
- $Re(z) < |z|$ et $Im(z) < |z|$
- $\big||z| - |z'|\big| \leqslant |z + z'| \leqslant |z| + |z'|$

- **Distance** : la distance entre $z$ et $z'$ noté $d(zz') = |z - z'|$ si $M(z)$ et $M'(z')$ $d(zz')$ est donc la distance entre $M$ et $M'$

- le cercle de centre $A(z_0)$ et de rayon $r$ est $\{z \in \mathbb{C} \ |z - z_0| = r\}$
- le disque fermé de centre $A(z_0)$ et de rayon $r$ est $\{z \in \mathbb{C} \ |z - z_0| \leqslant r\}$
- le disque ouvert de centre $A(z_0)$ et de rayon $r$ est $\{z \in \mathbb{C} \ |z - z_0| < r\}$

## Nombre complexes de module 1

Soit $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1 $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$
- le produit de 2 élément de $\mathbb{U}$ est un élément de $\mathbb{U}$
- l'inverse de tout élément de $\mathbb{U}$ est un élément de $\mathbb{U}$

– On appelle "cercle unité" ou "cercle trigonométrique" est le cercle de centre $O$ et de rayon 1 : $\{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$

## Trigonométrie circulaire

- On note $e^{i\theta}$ le nombre complexe défini par $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$
- $(e^{i\theta})' = -\sin\theta + i\cos(\theta) = i^2(\sin\theta + i\cos\theta) = i(\cos\theta + i\sin\theta) = ie^{i\theta}$
- $e^{i\theta} \neq 0$
- $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$
- $|e^{i\theta}| = 1$
- $e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$ et $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$
- $\dfrac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$
- $e^{i\theta} = e^{i\theta'} \Leftrightarrow \theta = \theta' + 2k\pi$

MOUVEMENT DE L'ESIB SOLIDAIRE

## Formule d'Euler

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

- Les formules permettent de calculer les puissances de $\cos(x)$ et $\sin(x)$

## Factorisation par l'arc moitié

En utilisant les formules d'Euler, on peut factoriser une expression de la forme $e^{ix} \pm e^{iy}$ en mettant en facteur $e^{i\frac{x+y}{2}}$ pour simplifier des puissances.

$$(e^{ix} + e^{iy})^n = \left[e^{i\frac{x+y}{2}}\left(e^{i\frac{x-y}{2}} + e^{-i\left(\frac{x-y}{2}\right)}\right)\right]^n$$

$$= e^{i\frac{x+y}{2}n}\left(2\cos\frac{x-y}{2}\right)^n$$

## Formule de Moivre

$$(\cos(\theta) + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

# II]- Notation trigonométrique et exponentiel d'un nombre complexe

Soit $z \in \mathbb{C}$ $\quad z = |z|e^{i\theta}$ où $|z|$ est le module de $z$
$\theta$ est un argument de $z$

- $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z') + 2k\pi$
- $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z') + 2k\pi$
- $\arg(\bar{z}) = \arg(z) + 2k\pi$
- $\arg(-z) = \arg(z) + \pi + 2k\pi$

## L'exponentielle complexe

Soit $z = x + iy$ : On pose $e^z = e^x \cdot e^{iy}$

- La restriction à $\mathbb{R}$ de $z \to e^z$ est l'exponentielle déjà connue
- $e^{e^z} = x$
- $\arg(e^z) = y\,[2k\pi]$
- $e^z = e^{z+2i\pi}$ on dit que l'exponentielle complexe est $2i\pi$-périodique

## Racine n-ième d'un nombre complexe

- Racine n-ième de l'unité

Les solutions dans $\mathbb{C}$ de $z^n = 1$ sont de la forme $U_n = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ où $0 < k < n-1$

$z^n = 1$ possède $n$ solutions.

- Somme des racines n-ième de l'unité : $\sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{i2k\pi}{n}} = 0$

MOUVEMENT DESIR SOLIDAIRE

## Racine n-ième d'un nombre complexe

Soit $z = Re^{i\theta}$, les solution dans $\mathbb{C}$ de $z^n = 3$ sont donné par

$$z_n = \sqrt[n]{R}\, e^{i\theta_n} \quad \text{où } \theta_n = \frac{\theta + 2k\pi}{n} \quad 0 < k < n-2$$

Remarque : $z_n = \sqrt[n]{R}\, e^{i\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)}$
$= \sqrt[n]{R} \times e^{i\theta/n} \times e^{i\frac{2k\pi}{n}}$

} pour trouver toute les racine, il suffit de determine 1 racine et de la multiplier par les racine n-ieme de l'unité

## Equation du 2nd degré dans $\mathbb{C}$

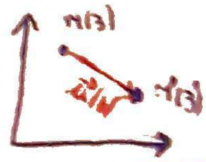
- Determination des racine carrée : On cherche $z = a+ib$
on pose $Z = x+ib$ tel que $Z^2 = z$
$(x+iy)^2 = a+ib$
et par identification de la partie reel et de la partie imaginaire on trouve $x$ et $y$

- Soient $az^2 + bz + c = 0$
$\Delta = b^2 - 4ac$
si $\Delta = 0 \Rightarrow z_0 = \frac{-b}{2a}$
si $\Delta \neq 0$ on trouve la racine carre de $\Delta$ et ainsi
$z_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ $z_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

MOUVEMENT DE L'ESIB SOLIDAIRE

## Transformation geometrique

- La translation de vecteur $\vec{u}(b)$ de $M(z)$ est $\boxed{z' = z+b}$




- L'homothetie de centre $\Omega(w)$ et de rapport $k \in \mathbb{R}$ est $\boxed{z'-w = k(z-w)}$
- La rotation de centre $\Omega(w)$ et d'angle $\theta \in \mathbb{R}$ est $\boxed{z'-w = e^{i\theta}(z-w)}$


- Symetrie centrale de centre O $\boxed{z' = -z}$
Symetrie axiale d'axe (Ox) $\boxed{z' = \bar{z}}$
Symetrie axiale d'axe (Oy) $\boxed{z' = -\bar{z}}$

- Similitude de centre $\Omega$, d'angle $\theta$ et de rapport $K$
$\boxed{z' = Ke^{i\theta}(z-w) + w}$