Chapitres 1: Fonctions usuelles.

1-1 Vocabulaire sur les fonctions.

-C'est une application définit sur un domaine D ⊂ R vers R.

$$f: D \subset R \to R$$
$$x \to y = f(x)$$

y : Image d'un antécédent x par f. D: Domaine de définition.

Fonctions : -Affine : $x \to nx + p$

-Polynomiale : $x \to P(x) = a_0 + a_1x + a_2x + \cdots a_nx^n$

-Rationnelle : tout quotient d'une fonction polynomiale par une fonction polynomiale non nulle.

Bijections : f est bijective, elle possède une réciproque $f^{-1}: B \to A \;\; par\; y = f(x) \leftrightarrow x = f^{-1}(y)$

$f: I \to J$ Une fonction bijective (I, J sont deux intervalles de R)

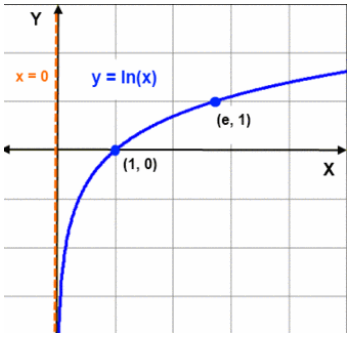
-Si f strictement monotone $\to f^{-1}$ strictement monotone de même sens.

-Si f continue sur $I \to f^{-1}$ continue sur J

-Si f derivable et f^{-1} ne s'annule pas sur I alors f^{-1} est dérivable : $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$

1-2 Fonctions log et exp.

Log : -l'unique primitive sur R^{+*} de $\frac{1}{x}$ qui s'annule en 1.



-**propriétés fondamentales**: $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$

$$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$$
$$\ln(x^n) = n.\ln(x)$$

-ln: $]0\,;+\infty[\to R \;\; / \;\; x \to \ln(x)$

est bijective car elle est continue et strictement croissante.

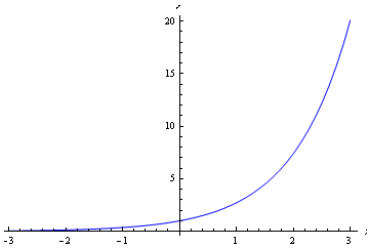
-$\lim\limits_{+\infty} \ln(x) = +\infty \quad et \quad \lim\limits_{0^+} \ln(x) = -\infty$

-$\lim\limits_{+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0 \quad et \quad \lim\limits_{0^+} x.\ln(x) = 0$

-$\ln(e) = 1$

exp: -fonction réciproque de $y = \ln(x)$

-$exp: R \to]0\,;\,+\infty[\;\; / \;\; x \to x = \ln(y)$ avec $y = \exp(x) \leftrightarrow x = \ln(y)$



- **propriétés fondamentale**: $\exp(x + y) = \exp(x)\exp(y)$

$$\exp(x - y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)}$$
$$\exp(nx) = \exp(x)^n$$
$$(\exp(x))' = \exp(x)$$
$$\left(\exp(u(x))\right)' = u'(x)\exp(u(x))$$

-$\lim\limits_{-\infty} \exp(x) = 0 \quad et \quad \lim\limits_{+\infty} \exp(x) = +\infty$

-$\lim\limits_{+\infty} \frac{\exp(x)}{x} = +\infty$

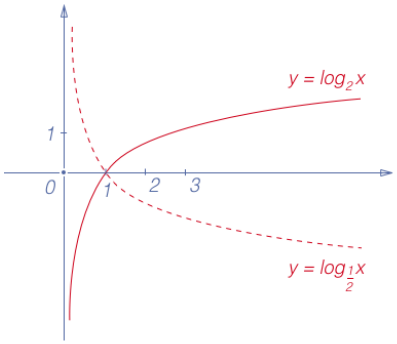
Log et exp de base quelconque :

Log

-Si $a > 0$ et $a \neq 1 (ln(a) = 0)$

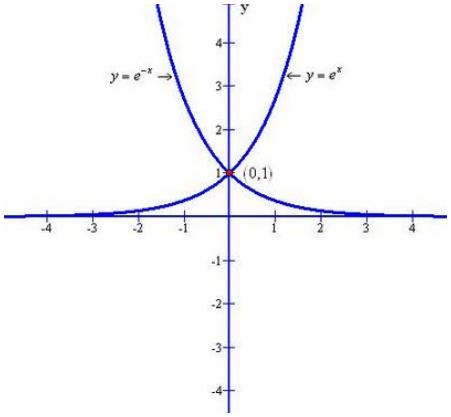
- $\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)} \;/\; \log_a(a) = 1 \;/\; \log_e(x) = \ln(x)$

- $\log_a :]0\,;\,+\infty[\to R$
$x \to y = \log_a(x)$ est une bijection.
-$(\log_a(x))' = \frac{1}{x.ln(a)}$
-$(\log_a(u))' = \frac{u'}{u.ln(a)}$



-Si $\boldsymbol{a} > 1$
-$\log_a(x)$ est strictement croissant.
-$\lim\limits_{0} \log_a(x) = -\infty \quad et \quad \lim\limits_{+\infty} \log_a(x) = +\infty$

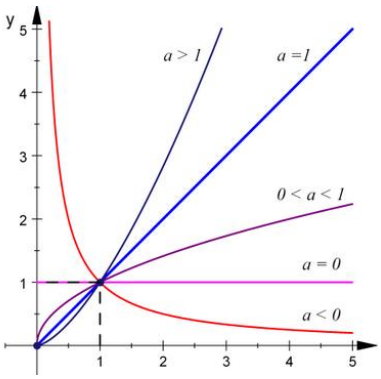
-Si $0 < a < 1$ ($\boldsymbol{ln(a)} < 0$)
-$\log_a(x)$ est strictement décroissant.
-$\lim\limits_{0} \log_a(x) = +\infty \quad et \quad \lim\limits_{+\infty} \log_a(x) = -\infty$
-$\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$
-$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$



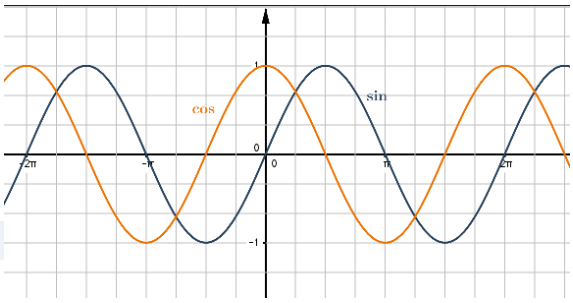
<u>exp</u>
-Si $\boldsymbol{a} > 0$, $a \neq 1$
- $y = \exp_a(x) \leftrightarrow x = \log_a(y)$
-$\exp_a(0) = 1$
-$\exp_a(1) = a$
-$\exp_a : R \to]0\,;\,+\infty[\;\; / \;\; x \to \exp_a(x)$ est une bijection.

-Si a>1
-$\exp_a(x)$ est strictement croissant.
-$\lim\limits_{-\infty} \exp_a(x) = 0$
-$\lim\limits_{+\infty} \exp_a(x) = +\infty$

-Si $0 < a < 1$
-$\exp_a(x)$ est strictement décroissante.
-$\lim\limits_{-\infty} \exp_a(x) = +\infty \quad et \quad \lim\limits_{+\infty} \exp_a(x) = 0$
- $y = \exp_a(x) \leftrightarrow x = \log_a(y) = \frac{\ln(y)}{\ln(a)}$, $a \neq 1 \leftrightarrow \ln(y) = x.\ln_a(a) \leftrightarrow y = \exp(x.ln(a))$
donc $\boldsymbol{\exp_a(x) = \exp(x.ln(a))}$
-$(\exp_a(x))' = \ln(a) \times \exp_a(x)$
-$\exp_a(x+y) = \exp_a(x)\exp_a(y)$
-$\exp_a(nx) = \exp_a(x)^n$
-$a^x = \exp(x.ln(a))$, $\forall a > 0$ car $1^x = \exp(x.ln(1)) = 1$



<u>1-3 Fonction Puissance.</u>
$\forall a \in R$, $\varphi_a : R^{+*} \to R^{+*} \;/\; x \to x^a = \exp(a.ln(x))$
-Si$a \in N$, la fonction $x \to x^a$ est définie **sans** forme exponentielle.
- $\forall a, b \in R$, $\forall x, y > 0$: -$x^a y^a = (xy)^a$
-$x^a x^b = x^{a+b}$
-$(x^a)^b = x^{ab}$
-$1^a = 1 \;\; et \;\; x^0 = 1 \;\; et \;\; \ln(x^a) = a.\ln(x)$
- $\forall a \in R$, $\varphi(x) = x^a$ est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ et $\varphi_a'(x) = a.x^{a-1} = a.\exp\big((a-1)\,ln(x)\big)$



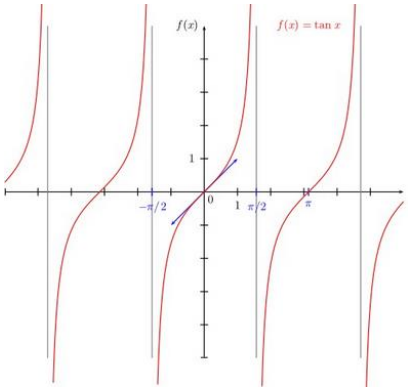
-Lorsque $a > 0$, $\lim_{0} \varphi_a(x) = 0$ et on prolonge par continuite avec $\varphi_a(0) = 0$

-$\varphi'_a(x) = a.x^{a-1} = a.\exp\big((a-1)\,ln(x)\big)$:

-Si $a > 1 \rightarrow \varphi_a$ est dérivable en 0 et $\varphi'_a(0) = 0$

-Si $0 < a < 1 \rightarrow \varphi_a$ non dérivable en 0 mais il existe une tangente vertical a l'origine.

-Si $a = 1 \rightarrow \varphi'_1(x) = a = 1$



1-4 Fonctions circulaires et réciproque.

Fonction circulaires.

-$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ définie sur $R\backslash\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\,, k \in Z\right\}$

-Les fonctions sin et cos sont **2π-periodique** et dérivables a valeurs dans [-1 :1]

-$(\mathbf{\sin u})' = \mathbf{u' \cos u}$ $\boldsymbol{et}$ $(\mathbf{\cos u})' = -\mathbf{u' \sin u}$

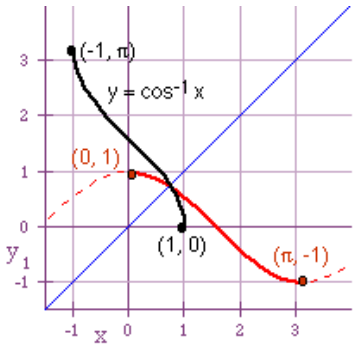
-$(\tan u)' = u'(1 + \tan^2 u) = \frac{u'}{\cos^2 u}$

-$(\cot u)' = \frac{u'}{\sin^2 u}$

-sin et tan: Impaires et cos: paire

-si $\cos(x) = \cos(y)$ sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ donc $x = y$

Transformation affines :



$\sin(-x) = -\sin(x)$ $\quad$ $\sin(\pi - x) = \sin(x)$

$\cos(-x) = \cos(x)$ $\quad$ $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$

$\sin(\pi + x) = -\sin(x)$ $\quad$ $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(\mathrm{x})$

$\cos(\pi + x) = -\cos(x)$ $\quad$ $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin(x)$

$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos(\mathrm{x})$ $\quad$ $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$

Formules d'additions :

$\cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$

$\sin(a + b) = \cos(a)\sin(b) + \sin(a)\cos(b)$

$\tan(a + b) = \tan(a) + \tan(b) - \tan(a)\tan(b)$

$\cos(x) - \cos(y) = -2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$

$\sin(x) - \sin(y) = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$

Limites :

$\lim_{0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ $\quad$ et $\quad$ $\lim_{0} \frac{(1-\cos(x))}{x^2} = \frac{1}{2}$

Réciproque des fonctions circulaires.

-Arccos.

-**cos** : strictement décroissante sur $[0 + \pi]$, $cos'(x) = -\sin(x) < 0$ donc bijection de $[0\,;\pi]$ sur $[-1\,;1]$

-Bijection réciproque : arccos : $[-1\,;1] \rightarrow [0\,;\pi]$ / $x \rightarrow y = \arccos(x)$

-$\forall x \in [-1\,;1]$, $\cos(arccos(x)) = x$

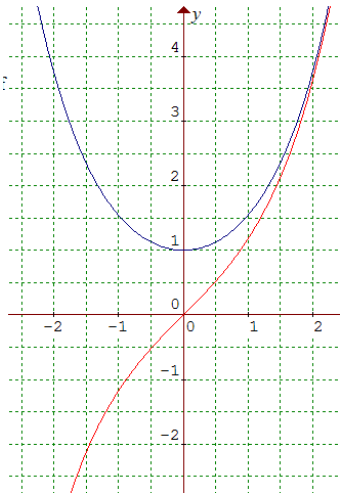
-$\forall x \in [0\,;\pi]$, $\arccos(\cos(x)) = x$

-$\forall x \in [-1\,;1]$, $\sin(\arccos(x)) = \sqrt{1 - x^2}$

-$\forall x \in [-1\,;1]$, $\arccos(-x) = \pi - \arccos(x)$

-$\forall x \in [\pi\,;2\pi]$, $\arccos(\cos(x)) = 2\pi - x$

MOUVEMENT DE L'ÉDB SOLIDAIRE



-arccos: continue et strictement décroissante sur $[-1\,;\ 1]$ derivable sur $]-1\,;1[$

-$(\arccos(x))' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\left(-\frac{\boldsymbol{u'}}{\sqrt{\boldsymbol{1-u^2}}}\right)$

-Arcsin.

-sin : $\left[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right] \to [-1\,;1]$ / $x \to \sin x$ continue et strictement croissante.

-bijective → bijection réciproque : arcsin : $[-1\,;1] \to \left[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right]$ / $x \to y = \arcsin x$ → $\sin y = x$

-$\forall x \in [-1\,;1]$, $\sin(\arcsin(x)) = x$

-$\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right]$, $\arcsin(\sin(x)) = x$

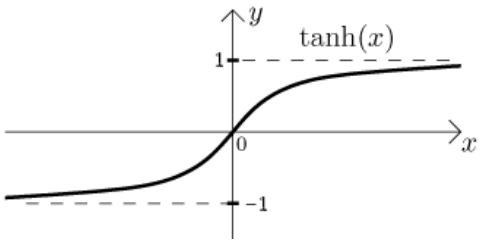
-$\forall x \in [-1\,;1]$, $\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2}$

-$\forall x \in [-1\,;1]$, $\arcsin(-x) = -\arcsin(x)$ (fonction impaire)

-$\forall x \in \left[\frac{\pi}{2}\,;\frac{3\pi}{2}\right]$, $\arcsin(\sin(x)) = \pi - x$

-**arcsin** : continue et strictement croissante sur $[-1\,;1]$ dérivable sur $]-1\,;1[$

-$(\arcsin(x))' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\left(\frac{\boldsymbol{u'}}{\sqrt{\boldsymbol{1-u^2}}}\right)$



-Arctan.

-**tan** : $]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}[\ \to R$ est continue et strictement positive alors bijective.

-bijection réciproque : arctan $R \to]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}[$ / $x \to y = \arctan(x)$ → $\tan(y) = x$

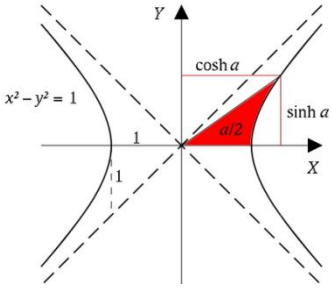
-$\forall x \in R$, $\tan(\arctan(x)) = x$

-$\forall x \in]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}[$, $\arctan(\tan(x)) = x$

-$\forall x \in \mathrm{R}$, $\arctan(-x) = -\arctan(x)$ (fonction impaire)

-**arctan** : continue et strictement positive et dérivable sur R.

-$(\arctan(x))' = \frac{1}{1+x^2}$ $\left(\frac{\boldsymbol{u'}}{\boldsymbol{1+u^2}}\right)$



1-5 Fonctions hyperboliques.

Fonction sinus hyperbolique :

- $sh\ (x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

- sh est impaire.

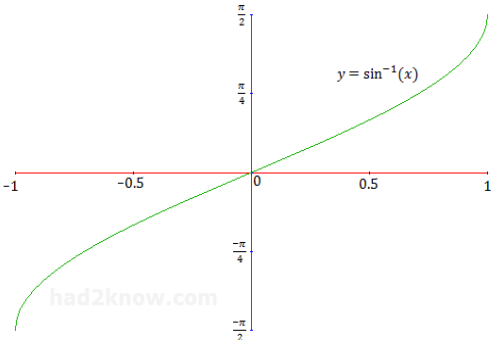
-sh est continues et dérivables sur R $(sh(u))' = u'ch(u)$

Fonction cosinus hyperbolique :

-$ch(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

-ch est paire

-ch est continues et dérivable sur R $(ch(u))' = u'sh(u)$



***sh* et *ch*:**

-$\forall x \in R$ $ch(x) \geq 1$ :: $ch(x) + sh(x) = e^x$ :: $ch(x) - sh(x) = e^{-x}$ :: $ch^2(x) - sh^2(x) = 1$

Fonctions tangente hyperbolique :

-$th(x) = \frac{sh(x)}{ch(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$

-th est impaire

had2know.com

-th est continue et dérivable sur R $\left(th(x)\right)' = \frac{1}{ch^2(x)} = 1 - th^2(x)$

<u>sh , ch et th:</u> $(\forall x, y \in R)$

-$ch(x+y) = ch(x)ch(y) + sh(x)sh(y)$

-$sh(x+y) = sh(x)ch(y) + ch(x)sh(y)$

-$th(x+y) = \frac{th(x)+th(y)}{1+(th(x)th(y)}$

-$ch(x-y) = ch(x)ch(y) - sh(x)sh(y)$

-$sh(x-y) = sh(x)ch(y) - ch(x)sh(y)$

-**Si on pose $x = ch(x)$ et $y = sh(x)$ alors $x^2 - y^2 = 1$ est l'équation d'une hyperbole équilatère.**

MOUVEMENT DE L'ESIB SOLIDAIRE