

# Chapitre 5: Limite et continuité

## \* Définition

Soit  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$

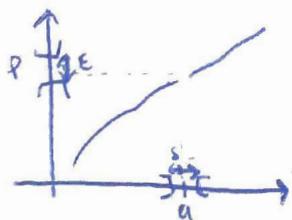
- $f$  est croissante (resp strictement croissante) si  $\forall x, y \in D \quad x \leq y \rightarrow f(x) \leq f(y)$   
( $x < y \rightarrow f(x) < f(y)$ )
- $f$  est décroissante (resp strictement décroissante) si  $\forall x, y \in D \quad x \leq y \rightarrow f(x) \geq f(y)$   
( $x < y \rightarrow f(x) > f(y)$ )
- $f$  est majorée si  $\exists M \in \mathbb{R}$  tel que  $\forall x \quad f(x) \leq M$
- $f$  est minorée si  $\exists m \in \mathbb{R}$  tels que  $\forall x \quad f(x) \geq m$
- $f$  est bornée si elle est majorée et minorée
- si  $D$  est symétrique par rapport à 0 alors :  $f$  est paire si  $f(x) = f(-x) \quad \forall x \in D$   
 $f$  est impaire si  $f(x) = -f(-x) \quad \forall x \in D$
- $f$  est périodique si  $\exists T > 0$  tel que  $\forall x \in D \quad f(x+T) = f(x)$
- si  $f$  et  $g$  sont monotones (càd croissante ou décroissante) alors  $f \circ g$  est aussi monotone tel que

$f \backslash g$	$\nearrow$	$\searrow$
$\nearrow$	$\nearrow$	$\searrow$
$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$

- Si  $f$  et  $g$  sont paires (resp impaires) alors  $\alpha f + \beta g$  est aussi paires (resp impaires)  
 $(\alpha f + \beta g)(x) = \alpha f(x) + \beta g(x) = \alpha f(-x) + \beta g(-x)$  si  $f$  et  $g$  paires  
 $= -\alpha f(x) - \beta g(x)$  si  $f$  et  $g$  impaires
- Les fonctions  $T$ -périodiques sont stables par combinaison linéaire et par produit.

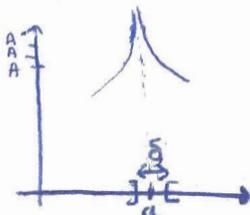
## \* Limites

$\rightarrow$  limite en un point  $a \in \mathbb{R}$  :  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$



$$\Rightarrow \forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in I \quad |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-l| < \epsilon$$

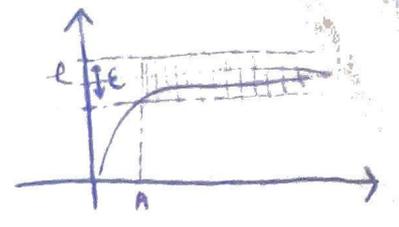
cas  $l = +\infty$



$$\Rightarrow \forall A \in \mathbb{R} \quad \exists \delta > 0, \forall x \in I \quad |x-a| < \delta \rightarrow f(x) > A$$

cas  $l = -\infty$  :  $\forall B \in \mathbb{R} \quad \exists \delta > 0, \forall x \in I \quad |x-a| < \delta \rightarrow f(x) < B$

→ Limite en l'infini:  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = l$



- cas  $l = l \quad \forall \epsilon > 0 \exists A \in \mathbb{R} \quad x \geq A \rightarrow |f(x) - l| < \epsilon$
- cas  $l = +\infty \quad \forall A \in \mathbb{R} \exists B \in \mathbb{R} \quad x \geq B \rightarrow f(x) > A$
- cas  $l = -\infty \quad \forall A \in \mathbb{R} \exists B \in \mathbb{R} \quad x \geq B \rightarrow f(x) < A$

→ Limites à droite et limites à gauche.

• On dit que  $l$  est la limite à droite de  $a$  si  $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in [a, a+\delta] \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon$   
 on note  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = l$

• On dit que  $l'$  est la limite à gauche de  $a$  si  $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in [a-\delta, a] \Rightarrow |f(x) - l'| < \epsilon$   
 on note  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = l'$

si  $\lim_{x \rightarrow a^+} = \lim_{x \rightarrow a^-}$  on note  $\lim_{x \rightarrow a}$

Caractérisation séquentielle des limites:

Théorème:  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \iff$  pour toute suite  $U_n$  qui tend vers  $a$   $f(U_n)$  converge vers  $l$ .

On utilise ce théorème pour montrer qu'une fonction n'est pas convergente en trouvant deux suites  $U_n$  et  $V_n$  tel que  $U_n \rightarrow a$  et  $V_n \rightarrow a$  mais  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(U_n) \neq \lim_{n \rightarrow \infty} f(V_n)$

Limites et opérations

Soit 2 fonctions  $f$  et  $g$  tel que  $\lim_a f = l$  et  $\lim_a g = l'$  dans

- $\lim_a (f+g) = l+l'$
- $\lim_a (af) = al$
- $\lim_a (f \cdot g) = l \cdot l'$

si  $l \neq 0 \quad \lim_a \frac{1}{f} = \frac{1}{l}$

si  $l = 0$  et  $f(x) > 0 \rightarrow \lim_a \frac{1}{f} = +\infty$

si  $l = 0$  et  $f(x) < 0 \rightarrow \lim_a \frac{1}{f} = -\infty$

$\lim_a \frac{f}{g}$  si  $l' \neq 0 = \frac{l}{l'}$

MOUVEMENT  
 DE L'ESIB  
 SOLIDAIRE

Composition des limites:

Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions tels que:

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$  et  $\lim_{y \rightarrow b} g(y) = l$  alors  $\lim_{x \rightarrow a} g \circ f(x) = l$

Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions : si  $\lim_a f(x) = 0$  et  $g$  est bornée alors  $\lim_a fg = 0$

\* Soit  $f$  une fonction tel que  $\lim_a f(x) = l$  si  $l > \alpha$  alors  $f(x) > \alpha$  au voisinage de  $a$  et si  $l < \alpha$   $f(x) < \alpha$  au voisinage de  $a$

\* Soit  $f$  et  $g$  deux fonction tel que  $f < g$  au voisinage de  $a$

- si  $f$  et  $g$  converge en  $a$  alors  $\lim_a f < \lim_a g$

- si  $\lim_a f = +\infty$  alors  $\lim_a g = +\infty$

- si  $\lim_a g = -\infty$  alors  $\lim_a f = -\infty$

\* théorème des gendarmes: Soient  $f, g, h$  trois fonction tels que  $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$

si  $\lim_a f(x) = l$  et  $\lim_a h(x) = l$  alors  $\lim_a g(x) = l$

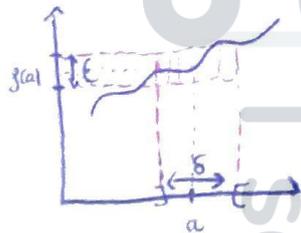
\* Si  $f$  est une fonction monotone de  $]a, b[$  alors :

si  $f$  est croissante  $\lim_a f(x) = \inf f(x)$   
 $\lim_b f(x) = \sup f(x)$

si  $f$  est décroissante  $\lim_a f(x) = \sup f(x)$   
 $\lim_b f(x) = \inf f(x)$

## Continuité

$f$  est continue en  $a \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in \mathbb{R} |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon$



•  $f$  est continue à droite :  $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in \mathbb{R} [a, x < a + \delta] \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon$

•  $f$  est continue à gauche :  $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in \mathbb{R} [a - \delta < x < a] \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon$

↳  $f$  est continue en  $a$  si elle est continue à droite et à gauche

\* Soit  $f, g$  deux fonctions continues alors  $f, g, f+g, \frac{f}{g} (g \neq 0)$  et  $g \circ f$  sont continues.

• Si  $f$  est continue en  $a$  alors  $f$  est bornée au voisinage de  $a$

## prolongement par continuité

Soit  $f$  une fonction définie sur  $I \setminus \{a\}$  tel que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$  avec  $l \notin f$  fini

si on pose  $f(a) = l$  la fonction est ainsi prolongée et devient continue en  $a$

## Theorème des valeurs intermédiaires :

Soit  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  avec  $a, b \in I$  tel que  $a < b$   
si  $f$  est continue alors  $f$  prend toutes les valeurs intermédiaires comprises entre  $f(a)$  et  $f(b)$

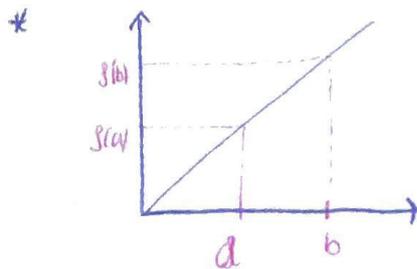
Remarque : si  $f$  est monotone, ces valeurs sont uniques

• si  $f$  prend une valeur  $(+)$  et une valeur  $(-)$  alors  $f$  s'annule

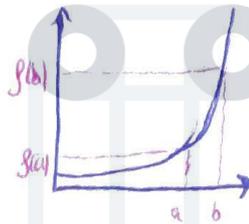
\* l'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle

• Soit  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  tel que  $a < b$   
si  $f$  est continue alors  $f$  admet un minimum et un maximum

\* Soit  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue strictement monotone,  $f$  réalise une bijection de  $I$  vers  $f(I)$   
tel que  $f^{-1}: f(I) \rightarrow I$  est continue et de même monotonie



$$[a, b] \simeq [f(a), f(b)]$$



$$[a, b] \neq [f(a), f(b)]$$

MOUVEMENT  
DE L'ESIB  
SOLIDAIRE