

Chapitre 4: Suites numériques

I.- Suite réelle

a) Une suite réelle est une fonction $u: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ où u_n est l'image de l'entier n dans \mathbb{R} . La suite s'écrit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$

- On dit qu'une suite est :

- constante si: $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_{n+1}$

- majorée si: $\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leq M$

- minorée si: $\exists m \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \geq m$

- bornée si elle est minorée et majorée

- croissante si $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leq u_{n+1}$, strictement croissante si $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n < u_{n+1}$

- décroissante si $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \geq u_{n+1}$, strictement décroissante si $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n > u_{n+1}$

- monotone si elle est croissante ou décroissante

- stationnaire si $\exists c \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 \quad u_n = c$

- périodique si $\exists p \in \mathbb{N}^*$ tel que $u_{n+p} = u_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

* $(u_n)_n$ est bornée si et seulement si $|u_n|_n$ est majoré ; $\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N} \quad |u_n| \leq M$

b) Limite d'une suite réelle:

- Une suite $(u_n)_n$ converge vers $\ell \Rightarrow \forall \epsilon > 0, \exists n_0, \forall n \geq n_0 \quad |u_n - \ell| < \epsilon$

- Une suite $(u_n)_n$ diverge vers $+\infty \Rightarrow \forall A \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 \quad u_n \geq A$

- Une suite $(u_n)_n$ diverge vers $-\infty \Rightarrow \forall A \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 \quad u_n \leq A$

* Une suite converge vers une limite finie ℓ , ou elle diverge vers une limite infinie $(-\infty, +\infty)$ ou elle diverge sans limite (ex $(-1)^n$)

* la limite lorsqu'elle existe est unique

* Toute suite convergente est bornée (Δ Toute suite bornée n'est pas convergente ex: $(-1)^n$)

- Soit $(u_n)_n \rightarrow \ell$ et $a \in \mathbb{R}$

- Si $a < \ell : \exists n \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 \quad u_n > a$

- Si $a > \ell : \exists n \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 \quad u_n < a$

c) Opérations sur les suites : Soit U_n et V_n deux suites tels que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = l_u \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = l_v$$

- Soit $W_n = U_n + V_n$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} W_n = l_u + l_v$
- Soit $W_n = U_n - V_n$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} W_n = l_u - l_v$
- Soit $W_n = U_n \times V_n$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} W_n = l_u \cdot l_v$
- Si $U_n \in \mathbb{N}$ $U_n \neq 0$ et $l_v \neq 0$ alors $(\frac{1}{U_n})_n$ converge vers $\frac{1}{l_v}$
- Si $U_n \in \mathbb{N}$ $U_n \neq 0$ et $l_v \neq 0$ alors $(\frac{U_n}{V_n})_n$ converge vers $\frac{l_u}{l_v}$

→ Soit $U_n \leq V_n$ à partir d'un certain rang :

- si $(U_n)_n \rightarrow l_u$ et $(V_n)_n \rightarrow l_v$ → $l_u \leq l_v$
- si $(U_n)_n \rightarrow +\infty$ alors $(V_n)_n \rightarrow +\infty$
- si $(V_n)_n \rightarrow -\infty$ alors $(U_n)_n \rightarrow -\infty$

d) Théorème d'encadrement

Soit : $U_n \leq V_n \leq W_n$

à partir d'un certain rang si $U_n \rightarrow l$ et $W_n \rightarrow l$ alors $V_n \rightarrow l$

- Soit $(U_n)_n$ et $(V_n)_n$ deux suites, si $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n > n_0 |U_n - l| \leq V_n$ et $V_n \rightarrow 0$ alors $U_n \rightarrow l$

II Suites extraites

Une suite extraite de $(U_n)_n$ est une suite du type $U_{p(n)}$ où $p(n)$ est une fonction croissante de \mathbb{N} dans \mathbb{N}

ex: U_{2n} est une suite extraite de U_n avec $p(n) = 2n$ croissante

U_{7n+8} est une suite extraite de U_n avec $p(n) = 7n+8$ croissante

- Si W_n est extraite de U_n et V_n est extraite de U_n alors W_n est extraite de V_n
- Tout suite extraite d'une suite de limite $l \in \mathbb{R}$ tend aussi vers l
- Pour démontrer qu'une suite diverge, il suffit de montrer qu'une sous suite diverge ou que 2 sous suites convergent vers 2 limites distinctes.
- si $(U_n)_n$ est une suite réelle bornée alors on peut extraire une sous suite convergente (Théorème de Bolzano-Weierstrass)

Suites adjointes:

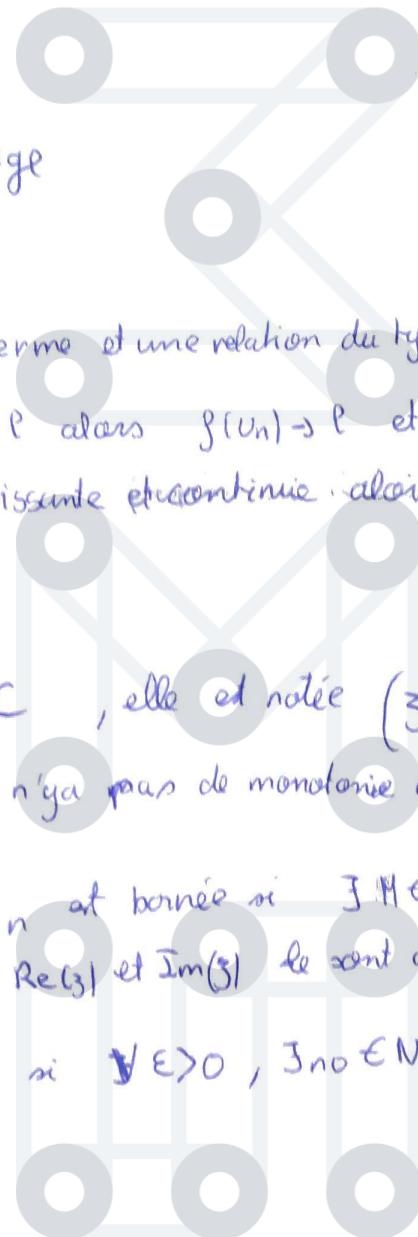
Soit U et V deux suites réelles. U et V sont dites adjacentes si a est \nearrow et b est \searrow et a et b convergent vers la même limite l .

On a alors que $U_n \leq l \leq V_n$

et le segment $[a_n, b_n]$ est une suite décroissante tel que $\cap [a_n, b_n]$ est un singleton qui est l

cas importants

- soit $U_n = a^n \quad a \in \mathbb{R}$
- si $a = 1 \quad \lim U_n = 1$
- si $a > 1 \quad \lim U_n = +\infty$
- si $-1 < a < 1 \quad \lim U_n = 0$
- si $a \leq -1$ alors $(U_n)_n$ diverge



Suites récurrentes

Suite définie par son 1er terme et une relation du type $g(U_n) = U_{n+1}$

- Si g est continue et $U_n \rightarrow l$ alors $g(U_n) \rightarrow l$ et $g(l) = l$
- Si g est une fonction croissante et continue alors U_n est monotone et converge vers l tel que $g(l) = l$

III Suite complexes

Suite complexe $z_n : N \rightarrow \mathbb{C}$, elle est notée $(z_n)_n$

⚠️ Dans les suite complexes il n'y a plus de monotonie de suite, de majorant et de minorant.

- Une suite complexe $(z_n)_n$ est bornée si $\exists M \in \mathbb{R}^*, \forall n \in \mathbb{N} \quad |z_n| \leq M$
- Si $|z_n|$ est bornée $\Leftrightarrow \text{Re}(z)$ et $\text{Im}(z)$ le sont aussi, c'est à dire
- Si $|z_n|_n$ converge vers $l \in \mathbb{C}$ si $\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n > n_0 \quad |z_n - l| < \epsilon$