Chapitre 6 : Dérivabilité

* f est derivable en a si $\lim\limits_{a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x-a}$ existe et est finie

* On dit que f est derivable si elle est derivable en tout point. On note $f'(x)$ ou $\dfrac{df}{dx}$ la derivé.

* Si f est derivable en a, la droite d'equation $y = f(a) + f'(a)(x-a)$ et l'equation de la tangente de f en a.

* f est derivable en a alors f est continue en a

* Derivé à droite de a : $\lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f(x) - f(a)}{x-a}$ * Derivé à gauche de a : $\lim\limits_{x \to a^-} \dfrac{f(x) - f(a)}{x-a}$

* f est defini au voisinage de a $\Longleftrightarrow f'_{droite}(a) = f'_{gauche}(a)$

* $(\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g'$ avec f et g des fonctions : λ et μ des constante

* $(fg)' = f'g + g'f$

* $\left(\dfrac{1}{g}\right)' = \dfrac{-g'}{g^2}$

* $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - g'f}{g^2}$

* $(g \circ f)' = (g' \circ f) f'$ <u>exemple</u> : $(\cos u)' = -u' \sin(u)$

* Soit f une fonction bijective : $(f^{-1})' = \dfrac{1}{f' \circ f^{-1}} = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(x))}$

* $f^0 = f$

* $f^K = (f^{K-1})'$ si f^{K-1} est derivable

* Si $f^{(n)}$ existe alors f est n fois derivable

* f est de classe C^n si f est derivable n fois et la derivé n-ième est continue

* $f+g$ est de classe $C^n \Rightarrow (f+g)^n = f^n + g^n$

* λf est de classe $Cn \Rightarrow (\lambda f)^n = \lambda f^{(n)}$

* fg est de classe $C^n \Rightarrow (fg)^n = \sum\limits_{K=0}^{n} \binom{n}{K} f^K g^{n-K}$

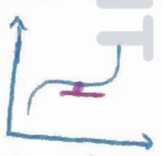
* si f et g sont de classe C^n alors $g \circ f$ est de classe C^n

* Soit f une bijection de classe C^n telle que f' ne s'annule pas $\Rightarrow f^{-1}$ est de classe C^n

* Si f est derivable en a à gauche et à droite avec a un extremum alors $f'(a) = 0$

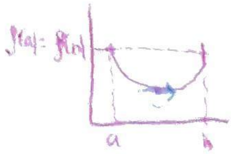
ce theoreme est faux si a est une borne et la reciproque du theoreme est faux

a derivable et a extremum mais $f'(a) \neq 0$

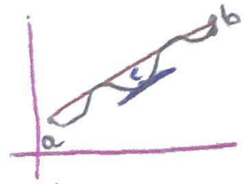


$f'(a) = 0$ mais a n'est pas extremum

Théorème de Rolle : Soit f une fonction continue et dérivable sur $[a,b]$ avec $f(a) = f(b)$, Alors il existe $c \in [a,b]$ tel que $f'(c) = 0$ (c est en effet un extremum)

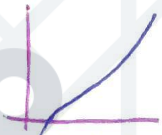


Théorème des accroissements finie : Soit f une fonction dérivable sur $]a,b[$ alors il existe $c \in [a,b]$ tel que $f'(c) = \boxed{\frac{f(b)-f(a)}{b-a}}$ → pente de $[ab]$ càd $f'(c)$ ~~est~~ parallèle à $[a,b]$

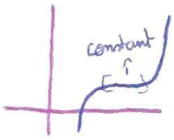


⚠ c n'est pas unique

* f constant $\Rightarrow f' = 0 \quad \forall x$
* f croissant $\Rightarrow f' \geq 0 \quad \forall x$
* f décroissant $\Rightarrow f' \leq 0 \quad \forall x$



→ f est strictement croissant



→ f est croissant

* **Théorème des inégalités des accroissement finie**

Soit f une fonction continue et dérivable sur $[a,b]$.
Si il existe K tel que $|f'(x)| \leq K$ alors f est dite K-lipschitzienne (càd f' est bornée)

On a $m \leq f'(x) \leq M$

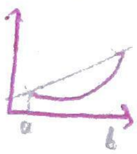
$$m \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq M \Rightarrow m(b-a) \leq f(b)-f(a) < M(b-a)$$

* Soit f une fonction continue et dérivable sur $I/\{a\}$. Si $\lim_{x \to a} f'(x)$ existe et est fini alors f est dérivable en a.

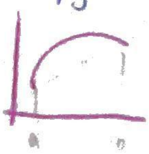
Fonction convexe et concave

* L'ensemble des réels compris dans un segment $[a\ b]$ s'écrit $\lambda a + (1-\lambda) b$ avec $\lambda \in [0,1]$

→ f est convexe sur $[a,b]$ si $\forall \lambda \in [0,1]$, $f(\lambda a + (1-\lambda) b) \leq \overbrace{\lambda f(a) - (1-\lambda) f(b)}^{\text{pente}}$



→ f est concave sur $[a,b]$ si $\forall \lambda \in [0,1]$, $f(\lambda a + (1-\lambda) b) \geq \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b)$



* f convexe sur $[a,b]$ $\Rightarrow$ elle admet un minimum locale
$\Rightarrow f'(a) \geq 0$
$\Leftrightarrow f'$ est croissante et f'' positive

* Soit f une fonction convexe alors pour tous a_i et pour tous λ_i on a $f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(a_i)$ tel que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$