Chapitres 3: Fonctions de plusieurs variables.

-Fonction de $R^n \to R$
Sur R^n on considère la distance usuelle.

-$(a_p)_{p\in N}$ est une suite de R^n et $a \in R^n$: $(a_p)_{p\in N}$ converge vers a ssi : $\lim_{p\to+\infty} d(a_p, a) = 0$
ssi $\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0\ tq\ \forall n > n_0\ \to d(a_p, a) < \varepsilon.$
-Une suite $(a_n)_{n\in N}$ dans R^p converge vers a ssi $(a_p)_n$ converge à terme vers a.

-**Continuité** : $d(y_p, x) \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ alors $d\left(f(y_p), f(x)\right) \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 0$
Définition : f continu en un point $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ssi, à chaque fois qu'une suite y_p, $y_p = \left(y_{p_1}, y_{p_2}, \ldots, y_{p_n}\right)$ qui tend vers x, on doit avoir $f(y_p)_{p\in N}$ tend vers $f(x)$.

-Pour montrer que f n'est pas continu en (0,0), il suffit de trouver une suite $(a_n, b_n)_{n\in N^2}$ qui tend vers (0,0) mais dont l'image ne tend pas vers $f(0{,}0) = 0$.

-Afin d'étudier la limite/continuité, il suffit de passer en coordonnée polaire $(x = Rcos(\theta), y = Rsin(\theta), \theta \in [-\pi, \pi[\ )$ ou sphérique por des fonctions de $R^2 \to R\ \ ou\ \ R^3 \to R$

-**La dérivée partielle** de f par rapport à la $k^{iéme}$ variable au point a, c'est la limite quand elle existe :
$\lim_{x\to a_k} \frac{f(a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, X, a_{k+1} \ldots, a_n) - f(a_1, a_2 \ldots, a_k, a_{k+1}, \ldots, a_n)}{x - a_k}$ ca revient à fixer toutes les variables sauf la $k^{iéme}$ et calculer la dérivée par rapport à la $k^{iéme}$ variable.

-$f: R^n \to R\ \ \to \frac{\partial}{\partial x_j}$ sont les fonctions de $R^n \to R$.

On peut calculer les dérivées partielles par rapport à la même variable ou une autre :$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$

-Si les dérivées d'ordre n, existent et sont continues exemples en $n = 2$: $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$

-$(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in R^n$, et on a n fonctions : $R \to R$
$X_1: t \to X_1(t)$
$X_2: t \to X_2(t)$
$X_n: t \to X_n(t)$
$\frac{d}{dt}\left[f\left(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)\right)\right] = \frac{\partial f}{dx_1}\left(x_1'(t)\right) + \frac{\partial f}{\partial x_2} x_2'(t) + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} x_n'(t)$

-**Recherche d'extrema :** $A \subseteq R^n \to R$.
$X = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R^n$
-f atteint un maximum global (ou absolu) au point x ssi $\forall y \in A, f(x) \geq f(y)$
-f atteint un minimum global (ou absolu) au point x ssi $\forall y \in A, f(x) \leq f(y)$
-f atteint un maximum local en x ssi il existe un ouvert O de R^n contenant x tel que : $\forall y \in O \cap A, f(x) \geq f(y)$
-f atteint un minimum local en x ssi il existe un ouvert O de R^n contenant x tel que : $\forall y \in O \cap A, f(x) \leq f(y)$
-$f: A \subseteq R^n \to R$ et $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in A$. a est un point critique de f ssi toutes les dérivées partielles de f s'annulent en a cas particulier si $x = 1$, un point critique est un point où la dérivée s'annule.
-$A \subseteq R^n, A$ ouvert, $n \in N^*$ et $f: A \to R$ une fonction tel que les dérivées partielles existent et sont continues. Alors si en un élément $a \in A, f$ atteint un extremum (absolu ou local) alors a est un point critique de f. **La réciproque n'est pas vraie.**

$f: R^2 \to R$ Une fonction, les dérivées partielles jusqu'à l'ordre 2 existent et sont continues, $M(a, b)$ un point critique pour savoir si f admet un max, min ou aucun, on calcule $D(a, b) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \times \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2\right)(a, b)$

-Si $D(a, b) > 0$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b) > 0$ M minimum.

-Si $D(a, b) > 0$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b) < 0$ M maximum.

MOUVEMENT DESSIBE SOLIDAIRE

-Si $D(a,b) < 0$ M n'est ni maximum ni minimum local.
-Si $\Delta = 0$ on doit faire une autre démarche.

Remarque : $f: R \to R$ de classe C^∞ $(a \in R)$
-Si le plus petit $n \in N^*$ pour lequel $f^n(a) \neq 0$ est impaire, alors au point a, f n'admet ni max ni min en particulier si $f'(a) \neq 0$ ce n'est ni max ni min.
-Sinon, soit n_0 le premier entier positif, tel que $f^{n_0}(a) \neq 0$ (n_0 paire) : -si $f^{n_0}(a) > 0$ alors a est un min local.
-si $f^{n_0}(a) < 0$ alors a est un max local.
-Soit $f: R^n \to R$ à dérivées partielles continues. Le gradient de f en un point $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ est le vecteur :
$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \frac{\partial f}{\partial x_2}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\right)$$

-Si S est une surface d'équation $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = cte$ et $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in S$. Alors le gradient $f(a)$ est orthogonal à S.

-Pour maximiser (ou minimiser) une fonction $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ sous une contrainte fonction $g(x_1, x_2, \dots, x_n) = cte$.
On cherche les points $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ouu $\overrightarrow{grad}(f)$ et $\overrightarrow{grad}(g)$ sont parallèles. On résout : $\begin{cases} \overrightarrow{grad} f(x_1, \dots, x_n) = \lambda \overrightarrow{grad} g \\ g(x_1, \dots, x_n) = cte \end{cases}$

On calcul les valeurs de f aux points obtenues et on compare pour décider lesquels sont des max et min. Ce seront des max ou min absolue sur l'ensemble $S = [(x_1, x_2, \dots, x_n) ; g(x_1, x_2, \dots, x_n) = cte]$. **Il faut s'assurer que le max/min existe.**

Fonctions "Lagrangien" : $L: R^{n+1} \to R$
$(x_1, x_2, \dots, x_n) \to f(x_1, x_2, \dots, x_n) - \lambda g(x_1, x_2, \dots, x_n)$

$\begin{cases} \overrightarrow{grad} f(x_1, \dots, x_n) = \lambda \overrightarrow{grad} g \\ g(x_1, \dots, x_n) = cte \end{cases}$ S'écrit $\overrightarrow{grad}\, L(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda) = \vec{0}$

$\frac{\partial f}{\partial x_1} - \lambda \frac{\partial g}{\partial x_1} = 0$ $\frac{\partial f}{\partial x_2} - \lambda \frac{\partial g}{\partial x_2} = 0$ $\frac{\partial f}{\partial x_n} - \lambda \frac{\partial g}{\partial x_n} = 0$

MOUVEMENT DE L'ESIB SOLIDAIRE