Chapitre I : Series numerique

Definition : Soit U_n une suite d'element dans K. On appelle la serie $(S_n)_n$ la suite des sommes partielle de U_n tel que $S_n = \sum_{k=0}^{n} U_n$. On note $\sum_{n\geq 0} U_n$.

- Une serie geometrique est une serie dont le terme general est de la forme $U_n = q^n$ où $q \neq 0$
- Une serie de Rieman est une serie dont le terme general est de la forme $U_n = \frac{1}{n^\alpha}$ $\alpha \in \mathbb{R}$
- Une serie telescopique est une serie dont le terme general est de la forme $U_n = a_{n+1} - a_n$ où $(a_n)_n$ est une suite numerique

Convergence :

- Une serie de terme general U_n est dite convergente si la suite des sommes partielles $(S_n)_n$ est convergente. Sinon on dit que la serie diverge
- Si $\left(\sum_{n\geq 0} U_n\right)$ converge vers $\ell \iff \lim_{n\to+\infty} S_n = \ell$
- On appelle reste d'ordre n la serie $\sum_{n\geq 0} U_n$ la quantité $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} U_k = S - S_n$

proposition :

- La somme de deux series convergente est convergente
- la somme de deux series divergente peut etre convergente
- la somme d'une serie convergente et d'une serie divergente est forcement divergente
- Soit $(U_n)_n$ une suite complexe tel que $U_n = a_n + ib_n$. $\sum U_n$ converge $\iff \sum a_n$ et $\sum b_n$ converge
- Soit $\sum U_n$ une serie numerique, si $\sum U_n$ converge $\Rightarrow U_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$
  ↳ la reciproque est fausse.
- On dit que la serie $\sum U_n$ diverge grossièrement si son terme general ne tend pas vers 0 lorsque $n \to +\infty$
- la serie geometrique $\sum r^n$ converge $\iff |r| < 1$
- La serie $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ appelée serie de Rieman converge $\iff \alpha > 1$
- Soit $\sum U_n$ une serie telescopique avec $U_n = a_{n+1} - a_n$ alors $\sum U_n$ converge $\iff \sum a_n$ converge

Series à termes positifs

Une serie à termes positifs est converge si la suite des sommes partielles est majorée dans $\mathbb{R}$. Le critère s'applique aussi aux serie à terme positifs à partir d'un certain rang.

Theoreme de comparaison : Soit $\sum U_n$, $\sum V_n$ deux serie à terme positif, si $U_n \leq V_n$ (a partir d'un certain rang) alors

- Si $\sum V_n$ converge alors $\sum U_n$ converge
- Si $\sum U_n$ diverge alors $\sum V_n$ diverge

Soit $\sum U_n$ et $\sum V_n$ deux serie à terme positif :

- Si $U_n \underset{\infty}{\sim} V_n$ alors $\sum_{n\geq 0} U_n$ et $\sum_{n\geq 0} V_n$ ont la meme nature (Theoreme de l'equivalence

Regle de Riemann :

Soit $\sum_{n\geq 0}$ une serie à termes positifs :

1] s'il existe $\alpha > 1$ tel que $n^\alpha U_n \to 0$ alors $\sum U_n$ est convergente

2] s'il existe $\alpha \leq 1$ tel que $n^\alpha U_n \to +\infty$ alors U_n est divergente

Critère d'Alembert

Soit $\sum U_n$ une serie à terme ≥ 0

On suppose que $\frac{U_{n+1}}{U_n} \to l \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$

si $l < 1 \Rightarrow \sum U_n$ converge

si $l > 1 \Rightarrow \sum U_n$ diverge

si $l = 1$ on ne peut pas conclure

\# C'est un critère reservé aux series dont le terme general comporte un produit.

Critère de Cauchy

Soit $\sum U_n$ une serie à terme ≥ 0. On suppose que $\sqrt[n]{U_n} \xrightarrow[n+\infty]{} l \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$

si $l < 1 \Rightarrow \sum U_n$ converge

si $l > 1 \Rightarrow \sum U_n$ diverge

si $l = 0$ on ne peut pas conclure.

Serie ne gardant pas un signe constant

On dit qu'une serie $\sum U_n$ à terme dans K est absolument convergente si $\sum |U_n|$ est convergente.

On a alors : $|\sum U_n| < \sum |U_n|$

\# La reciproque est fausse ; $\sum U_n = \frac{(-1)^n}{n}$ est convergente mais $\sum |U_n| = \frac{1}{n}$ est divergente

Une ~~telle~~ serie est semi-convergente

Suite alternée :

Une suite U_n est dite alternée si $\forall n \in \mathbb{N}$ $U_n = (-1)^n |U_n|$

<u>ex</u> : $\frac{(-1)^n}{n}$

- Soit $\sum U_n$ une serie alternée. Si la suite $(|U_n|)_{n\geq 0}$ decroit vers 0 alors $\sum U_n$ est convergente.

Theoreme d'Abel

Soit (a_n) et (b_n) deux suites telles que :

$$\left.\begin{array}{l} \text{1) La suite } (a_n) \text{ est decroissante positive et tend vers } 0 \\ \text{2) La suite des sommes partielle de } b_n \text{ est bornée} \end{array}\right\} \Rightarrow \sum a_n b_n \text{ converge}$$

Produit de Cauchy de deux serie

Soit $\sum U_n$ et $\sum V_n$ deux series numeriques : $\sum U_n V_n \neq \sum U_n \sum V_n$

on a $\sum U_n \times \sum V_n = \sum W_n$ avec $W_n = U_0 V_n + U_1 V_{n-1} + U_2 V_{n-2} \dots U_n V_0$