Chapitre 3 : Espace vectoriel et application linéaire

§- Structure d'un espace vectoriel

$u \in E$, vecteur
$\lambda \in K$, scalaire

$\mathbb{K}$ un corps commutatif $= \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

- Soit un ensemble $E \neq \emptyset$, On dit que E est un K-ev si il est muni des 2 loi + et . tel que :

$+ : E \times E \to E$
$(u, v) \to u+v$

avec $(E,+)$ est un groupe abelien

$\cdot : K \times E \to E$
$(\lambda, u) \to \lambda u$

- associativite : $(\lambda y)x = \lambda(yx)$
- Element neutre : $\forall u, \ 1u = u$
- distributive : $(\lambda+y)u = \lambda u + yu$

propriétés de calcul :

1) $\forall u \in E \quad 0_K \cdot u = 0_E$
2) $\forall \alpha \in K \quad \alpha 0_E = 0_E$
3) $\forall \alpha \in K, \forall u \in E, \ \alpha u = 0E \Rightarrow \alpha = 0_K$ ou $u = 0E$
4) $\forall x \in E, \ (-\alpha)u = -(\alpha u)$
5) $\forall \alpha, \beta \in K, \ \forall u \in E, \ (\alpha - \beta)u = \alpha u - \beta u$
6) $\forall \alpha \in K$ et $u, v \in E$ on a $\alpha(u-v) = \alpha u - \alpha v$

combinaison lineaire (c.l)

Soit E un K-ev et $(u_1 .. u_n)$ une famille finie de vecteur de E.
Une combinaison lineaire (c.l) des element de cette famille et tout vecteur qui s'écrit comme
$$u = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i \quad \text{avec } \alpha_i \in K$$

Sous espaces vectoriel (s.e.v)

Soit E un K-ev et $F \subset E$, on dit que F est un s.e.v ssi
1) $F \neq 0$
2) $\forall \alpha, \beta \in K, \forall u, v \in F \quad \alpha u + \beta v \in F$

* Toute intersection de sev de E est un s.ev de E
* La reunion de sev n'est pas un s.ev

proposition : Soit A une partie non vide de E, l'∩ de tout les sev de E contenant A est le plus petit des sev de E contenant A. On le note Vect (A).
Le sev Vect (A) est l'ensemble des combinaison lineaire des element de A

* $A \subset B \Rightarrow Vect(A) \subset Vect(B)$
* X est un sev de E alors $Vect(X) = X$
* <u>Somme des sev</u> ; Soit F et G des sev de E. $F+G$ est aussi un sev de E aussi, $F+G = Vect(F \cup G)$

$u \in F+G$ alors $\exists\, v \in F$ et $\exists\, w \in G$ tel que $v + w = u$.

→ si v et w sont <u>unique</u> alors la somme $F+G$ est dite <u>direct</u> noté $F \oplus G$

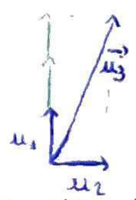
La somme $F+G$ est <u>direct $\Leftrightarrow F \cap G = \{0\}$</u>

→ F et G sont <u>supplementaire</u> dans E si leur somme est direct et egal à E

$$\boxed{F \oplus G = E}$$

Famille libre, famille generatrice et base

Famille liée



$\vec{u}_3 = 3\vec{u}_1 + \vec{u}_2$

↳ la famille (u_1, u_2, u_3) est liée car u_3 s'ecrit comme <u>une CL</u> de $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$

Def : Une famille de E (K-ev) $\{v_1 \dots v_p\}$ est liée si il $\exists$ $\{\alpha_1, \dots \alpha_p\} \in K$ $\underline{\neq 0}$ tel que $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i v_i = 0_E$

Famille libre

$(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ n'est pas une famille liée c'est une famille libre

Def : Une famille de E (K-ev) est dite libre si $\forall \{\alpha_1 \dots \alpha_p\} \in K$, $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i v_i = 0 \Rightarrow \underline{\alpha_1 = \dots = \alpha_p = 0}$

* Toute famille $\{u\}$ est libre si $u \neq 0_E$
* Toute sous famille d'une famille libre est libre
* Toute sous famille d'une famille liée est liée

Famille Generatrice

Soit A une famille de vecteur de E. On dit que A est une famille generatrice de E si $E = Vect(A)$. C'est à dire la CL des elements de A engendre tout les elements de E.

Base

Soit B une famille de vecteur de E. B est une <u>base</u> si elle est <u>libre</u> et <u>generatrice</u>

* Un e.v E est dit de dimension finie s'il admet au moins une famille generatrice fini
* Dans un ev de dimension finie, ~~une~~ famille libre ne peut pas avoir plus d'element qu'une famille generatrice
* Tout K-ev de dimension finie possède au moins une base
* Toute famille generatrice contient une base
* Toute famille libre peut etre completé en une base

Dimension de E

Soit E un K e v de dimension finie :
On appelle dimension de E noté $\dim_K E$ le cardinal d'une base quelconque de E.
* Toutes les bases d'un K ev de dimension finie ont le meme cardinal.

propriété sur les dimension :

Soit E un K-ev de dimension n :
1) Une famille libre a au plus n elements
2) une famille libre de cardinal n est une base
3) Une famille generatrice a au moins n element
4) Une famille generatrice de cardinal n est une base de E

Une base est la plus grande famille libre et la plus petite famille generatrice

Sous espaces vectoriels de dimension finie.

- Soit E un K-ev de dimension finie $n \geq 1$ et F un sev de E alors F est de dimension finie et $\dim F \leq \dim E$.
  Si $\dim F = \dim E \Rightarrow F = E$.
- Soit F et G des sev de E. $\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$
  ↳ si $F+G$ est une somme direct alors $\dim(F \oplus G) = \dim(F) + \dim(G)$
- Tout sev F de E de dimension finie admet un supplementaire H tel que

$$F \oplus H = E$$

Definition : Soit E un K-ev et $F = \{v_1 \dots v_p\}$ une famille de p vecteurs de E.
On appelle rang de F noté $rg(F)$ la dimension de $Vect(F)$.

* $rg(F) \leq p$
* si $rg(F) = p \Leftrightarrow$ F est une famille libre
* si $rg(F) \leq \dim E \Rightarrow$ F est une famille generatrice