Chap 3 : Series numerique

Definition : Soit U_n une suite d'element de K, On appelle serie numerique de terme general U_n la suite $(S_n)_n$ dans K telle que : $\forall n \in \mathbb{N}$ $S_n = \sum_{k=0}^{n} U_k$.
La serie $(S_n)_n$ est donc la suite des somme partielle de U_n.

- Une serie geometrique est une serie dont le terme general est de la forme $U_n = aq^n$, $a \neq 0$
- Une serie de Rieman est une serie dont le terme general est de la forme $U_n = \frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$
- Une serie telescopique est une serie dont le terme general est de la forme $U_n = a_{n+1} - a_n$ où $(a_n)_n$ est une suite numerique

Convergence

- Une serie de terme general U_n est dite convergente si la suite des somme partielles $(S_n)_n$ est convergente. Sinon on dit que la serie diverge.
- Si $\left(\sum_{n} U_n\right)$ converge vers ℓ $\Leftrightarrow$ $\boxed{\lim_{n \to +\infty} S_n = \ell}$
- On appelle reste d'ordre n de la serie $\sum_{n \geq 0} U_n$ la quantité : $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} U_k = S - S_n$

NB : Ne pas confondre $\sum_{n \geq 0} U_n$ qui designe la serie à $\sum_{n=0}^{+\infty} U_n$ qui designe la somme de la serie si elle converge

Propriété :

- La somme de deux serie convergente est convergente
- La somme de deux serie divergente peut etre convergente
- La somme d'une serie convergente et d'une serie divergente est forcement divergente
- Soit $(U_n)_n$ une suite complexe avec pour partie reel a_n et pour imaginaire b_n, la serie $\sum_n U_n$ converge ssi les deux series $\sum_n a_n$ et $\sum_n b_n$ convergent.
- Soit $\sum_{n \geq 0} U_n$ une serie numerique $\boxed{\text{si } \sum_{n \geq 0} U_n \text{ converge alors } U_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0}$

  ↳ La reciproque est fausse.

- On dit que la serie $\sum_n U_n$ diverge grossièrement si son terme general ne tend pas vers 0 lorsque $n \to +\infty$
  - $\sum_n (\sin(n))$ est grossièrement divergente
  - $\sum_n \frac{1}{n}$ (appelé serie harmonique) est divergente (mais pas grossièrement divergente)

- La serie geometrique $\sum_{n\geq 0} r^n$ converge ssi $|r|<1$ dans ce cas On a :
$$\sum_{n=0}^{+\infty} r^n = \frac{1}{1-r} = cte$$
- $\sum_{n\geq 0} (-1)^n$ est grossièrement divergente
- Soit U_n une serie telescopique avec $U_n = a_{n+1} - a_n$ alors $\sum_n U_n$ converge ssi $(a_n)_n$ converge

Series à terme positifs : $\sum_{n\geq 0} U_n$, $(U_n \geq 0)$

- Une serie à terme positif est convergente ssi la suite des somme partielles est majorée dans $\mathbb{R}$. Lorsque la suite $(S_n)_n$ des somme partielle n'est pas majorée On a $S_n \to +\infty$ puisque cette suite est croissante

Theorème de comparaison :

- Soit $\sum_{n\geq 0} U_n$ et $\sum_{n\geq 0} V_n$ deux series à terme positifs, si $U_n \leq V_n$ (a partir d'un certain rang) alors :
  1) si $\sum_{n\geq 0} V_n$ converge alors $\sum_{n\geq 0} U_n$ converge
  2) si $\sum_{n\geq 0} U_n$ diverge alors $\sum_{n\geq 0} V_n$ diverge
- Soit $\sum_{n\geq 0} U_n$ et $\sum_{n\geq 0} V_n$ deux series à terme positifs :
  1) Si $U_n = O(V_n)$, $\sum_{n\geq 0} V_n$ converge $\Rightarrow \sum_{n\geq 0} U_n$ converge
  2) Si $U_n = O(V_n)$, $\sum_{n\geq 0} U_n$ diverge $\Rightarrow \sum_{n\geq 0} V_n$ diverge
  3) si $U_n \underset{+\infty}{\sim} V_n$ alors $\sum_{n\geq 0} U_n$ et $\sum_{n\geq 0} V_n$ sont de même nature

Serie de rieman.

- La serie $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge ssi $\alpha > 1$, sinon elle diverge

Regle de Rieman : Soit $\sum_n U_n$ une serie à terme positifs :
- s'il existe $\alpha > 1$ tel que $n^\alpha U_n \to 0$ (ou vers ℓ) alors $\sum U_n$ converge
- s'il existe $\alpha \leq 1$ tel que $n^\alpha U_n \to +\infty$ alors $\sum U_n$ diverge

Serie absolument convergentes

- On dit qu'une serie est absolument convergente si $\sum_{n\geq 0} |U_n|$ est convergente.
- si la serie est absolument convergente alors elle est convergente
  ↳ la reciproque n'est pas vrai