Chapitre 4 : Matrice

I - Calcul matriciel

- On dit qu'une matrice A est de type (m,n) si elle à m lignes et n colonnes

  C'est une application $A : \mathbb{N}_m \times \mathbb{N}_n \to K$

  $$(i,j) \to a_{ij}$$

- Si $m = n$ on dit que A est une matrice carré d'ordre n, dans ce cas, $a_{11} \dots a_{nn}$ s'appelle les element de la diagonale principale
- Matrice ligne est une matrice de type $(1,n)$
- Matrice colonne est une matrice de type $(m,1)$
- Matrice nulle est une matrice dont tout les terme sont nuls.

Quelque matrice carre particulière

- Matrice unité $I_n = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$ $a_{ii} = 1$, $a_{ij} = 0$ si $i \neq j$
- Matrice diagonale $D_n = \begin{pmatrix} a_{11} & & & 0 \\ & a_{22} & & \\ & & a_{33} & \\ 0 & & & a_{nn} \end{pmatrix}$ $a_{ij} = 0$ si $i \neq j$
- Matrice triangulaire supererieur :

$$T_n^s = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- Matrice triangulaire inferieur :

$$T_n^i = \begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ a_{m,1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Operation sur les matrices

Addition : (uniquement sur les matrice de meme types)

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+1 & b+2 & c+3 \\ d+4 & e+5 & f+6 \end{pmatrix}$$

Multiplication par un scalaire ; Soit M une matrice d'ordre (m,n) et λ un scalaire

$$\lambda M = \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \\ \lambda e & \lambda f \end{pmatrix}$$

- $\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$
- $(\lambda + \mu) A = \lambda A + \mu A$
- $(\lambda \mu) A = \lambda(\mu A) = \mu(\lambda A)$

Multiplication de deux Matrices:

Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$ et $B \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow AB = \begin{pmatrix} a+3b+c & 2a+4b+2c & -a \\ d+3e+f & 2d+4e+2f & -d \end{pmatrix}$$

Remarque:
- $AB \neq BA$
- La multiplication de 2 matrice n'est possible que si le nb de ligne de la 1er est egale aux nombre de colonne de la 2eme;
- $AB = 0 \not\Rightarrow$ ni $A = 0$ ou $B = 0$
- $AB = AC \Rightarrow B = C$ si et seulement si A est carré et inversible
- $AB = 0 \not\Rightarrow BA = 0$
- $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ et vrai que si A et B commute cad $AB = BA$

Transposé d'une matrice:

La matrice transposé de $A = (a_{ij}) \in M_{m,n}$ est ${}^tA = (a_{ji}) \in M_{n,m}$

$$A = \begin{pmatrix} x & y \\ 3 & t \\ e & f \end{pmatrix} \quad {}^tA = \begin{pmatrix} x & 3 & e \\ y & t & f \end{pmatrix}$$

- ${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$
- ${}^t(\lambda A) = \lambda\, {}^tA$
- ${}^t(AB) = {}^tB\, {}^tA$
- L'application t $A \to {}^tA$ est un isomorphisme
- ${}^t({}^tA) = A$

- A est dite symetrique $\in S_n(K) \Leftrightarrow {}^tA = A$
- A est dite antisymetrique $\in A_n(K) \Leftrightarrow {}^tA = -A$
- si A et B sont symetrique alors $A+B$ et λA et aussi symetrique

Inverse d'une matrice: (Matrice carre uniquement $\in \mathcal{M}_n(K)$)

A est inversible $\in G_n(K)$ si il existe B tel que $AB = BA = I_n \Rightarrow B$ est l'inverse de A

A est inversible $\Leftrightarrow \det A \neq 0 \Leftrightarrow A$ est inv à gauche $\Leftrightarrow A$ est inv à droite $\Leftrightarrow rg\,A = n \Leftrightarrow \mathrm{Ker}\,A = \{0\}$

$\Leftrightarrow \mathrm{Im}\,A = M_{n,1}(K)$

Theoréme: $\dim S_n(K) = \dfrac{n(n+1)}{2}$ $\quad \dim A_n(K) = \dfrac{n(n+1)}{2}$

$\dim \mathcal{M}_n(K) = \dim S_n(K) \oplus \dim A_n(K)$

Remarque: L'inverse d'une matrice et unique

si A et B sont inversible alors $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$

II - Matrice et application linéaire

Soit E, F 2 e.v de dimension finie tel que $\dim E = n$, $\dim F = m$

$f : E \to F$ est une application linéaire.

$B = (e_i)$ une base de E et $B' = (e'_i)$ une base de F

La matrice f noté $\mathcal{M}(f, B, B') = \begin{array}{c} \\ e'_1 \\ \\ e'_n \end{array} \begin{array}{c} f(e_1) \quad f(e_n) \\ \begin{pmatrix} \vdots & \cdots & \vdots \\ & & \\ \vdots & \cdots & \vdots \end{pmatrix} \end{array}$ tel que $f(e_i) = \alpha e'_1 + \beta e'_2 \ldots \gamma e'_n$

Si $E = F$ et $B = B'$ alors $\mathcal{M}(f_{BB'}) = \mathcal{M}(f_B)$

- $\mathcal{M}(u+v, B, B') = \mathcal{M}(u, B, B') + \mathcal{M}(v, B, B')$
- $\mathcal{M}(\lambda u, B, B') = \lambda \mathcal{M}(u, B, B')$
- $\mathcal{M}(0, B, B') = 0$
- $\mathcal{M}(id_E, B) = Id_E$
- $\mathcal{M}(v \circ u, B, B'') = \mathcal{M}(v, B', B'') \times \mathcal{M}(u, B, B')$ $\quad E \xrightarrow{u} F \xrightarrow{v} G$
- si $E \to F$ est un isomorphisme alors $A = \mathcal{M}(u, B, B')$ est inversible et $A^{-1} = \mathcal{M}(u^{-1}, B', B)$

Formule fondamentale

On a : $\left.\begin{array}{l} E \text{ ev tel que } \dim E = n \\ F \text{ ev tel que } \dim F = m \\ B = e_i \text{ base de } E \\ B' = (e'_i) \text{ base de } F \\ A = \mathcal{M}(u, B, B') \\ X \in E \text{ et } Y \in F \end{array}\right\}$ $\quad Y = u(X) \Rightarrow Y = AX$

Changement de Base

Matrice de passage de B à B' associe à l'application ϕ

$$P_{BB'} = \mathcal{M}(Id_E, B', B) = P$$

$$\mathcal{M}(\phi, B') = P^{-1}\, \mathcal{M}(\phi, B)\, P$$