Cours + TD

Rédigé par Sarah Semaan

Analyse

SPE

Semestre 1

Chapitre 1 : Espaces vectoriels normés

1.1 - Définitions et propriétés de base

K est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

<u>Rappel</u> : Un K e.v. est un ensemble E muni d'une loi interne $+$: $E \times E \to E$ et $(v_1, v_2) \to \underset{\uparrow \text{ vecteur}}{v_1 + v_2}$

d'une loi externe $K \times E \to E$

$(\underset{\uparrow \text{nb}}{\lambda}, v) \to \lambda v$

qui vérifient les conditions suivantes :

(E, +) est un groupe abélien :
- $+$ est commutative : $\forall\, x, y \in E$, $x + y = y + x$
- $+$ est associative : $\forall\, x, y, z \in E$, $(x+y)+z = x + (y+z)$
- $+$ admet un élément neutre 0 (ou 0_E) : $\forall\, x \in E$, $x + 0 = x$
- Tout élément est symétrisable par rapport à $+$: $\forall x \in E$, $\exists y \in E$, $x + y = 0$ (le symétrique de x sera noté par $-x$)

- $\forall\, \lambda \in K$, $\forall\, x, y \in E$, $\lambda.(x+y) = \lambda . x + \lambda . y$
- $\forall\, \lambda, \lambda' \in K$, $\forall\, x \in E$, $\underbrace{(\lambda . \lambda') . x}_{\text{2 lois} \neq \text{ (interne et externe)}} = \underbrace{\lambda . (\lambda' . x)}_{\text{2 lois externes}}$
- $\forall\, \lambda, \lambda' \in K$, $\forall\, x \in E$, $(\lambda + \lambda') . x = \lambda . x + \lambda' . x$
- $\forall\, x \in E$, $1 . x = x$

Exemples : * $\mathbb{R}^n$ avec sa structure usuelle est un $\mathbb{R}$-ev, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

* L'ensemble des fonctions continues de $A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (A fixé) est un $\mathbb{R}$-ev.

$+$ et $\cdot$ sont définis de la façon usuelle.

Si $f, g \in C^0(A, \mathbb{R})$: $\underset{\uparrow \text{ + de 2 fct°}}{f+g}$: $A \to \mathbb{R}$, $x \to \underset{\uparrow \text{ + de 2 r}}{f(x) + g(x)}$

Si $\lambda \in \mathbb{R}$, $f \in C^0(A, \mathbb{R})$, $\lambda f : \begin{array}{l} A \to \mathbb{R} \\ x \to \lambda . f(x) \end{array}$

Définition: Soit E un K-ev. Une norme sur E est une application $N : E \to \mathbb{R}^+$ qui vérifient les propriétés suivantes :

* $\forall x \in E$, $N(x) = 0_{\mathbb{R}}$ ssi $x = 0_E$ (axiome de séparabilité)
* $\forall x \in E$, $\forall \lambda \in K$, $N(\lambda . x) = |\lambda| . N(x)$ (homogénéité)

externe — module dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ — $\cdot$ de $\mathbb{R}$

si $\lambda = a + ib$, $|\lambda| = \sqrt{a^2+b^2}$

* $\forall x, y \in E$, $N(x \overset{+_E}{+} y) \leq N(x) + N(y)$

$+$ de $\mathbb{R}$

Notation: les normes seront souvent notées par $\| . \|$ ($\|x\|$)

Exemples: 1) L'application valeur absolue de :

$$\begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \\ x \to |x| \end{array}$$

est une norme (évident)

2) Norme Euclidienne : $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$

$$v = (x_1, \ldots, x_n) \longrightarrow \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$$

($n \in \mathbb{N}^*$ fixé)

C'est une norme, elle sera notée par $\| \|_2$

_ Soit $v = (x_1 \ldots x_n) \in \mathbb{R}^n$ alors $\|v\|_2 = 0$ ssi $\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2} = 0$ or les $x_i \in \mathbb{R}$ alors $\forall i$, $x_i = 0$ d'où $v = 0$

_ Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $v = (x_1 \ldots x_n) \in \mathbb{R}^n$ alors :

$$\|\lambda v\|_2 = \sqrt{(\lambda x_1)^2 + (\lambda x_2)^2 + \cdots + (\lambda x_n)^2}$$
$$= \sqrt{\lambda^2 (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)} = |\lambda| \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$$
$$= |\lambda| \, \|v\|_2$$

$\langle v_1, v_2 \rangle = \|v_1\| \cdot \|v_2\| \cdot \cos\theta$

- Inégalité triangulaire : $\forall v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$,
$\|v_1 + v_2\|_2 \leqslant \|v_1\|_2 + \|v_2\|_2$

On remarque d'abord que $\| \|_2$ est donné par le produit scalaire : $\langle (x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \rangle$
$= x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$

$\|v\|_2 = \sqrt{\langle v, v \rangle}$
produit scalaire de 2 vecteurs

On remarque que $\forall n \in \mathbb{R}^n$, $\langle v, v \rangle \geq 0$

Soient $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$ fixés. On veut montrer que $\|v_1 + v_2\|_2 \leq \|v_1\|_2 + \|v_2\|_2$.

$\|v_1 + v_2\|_2 \leqslant \|v_1\|_2 + \|v_2\|_2 \Leftrightarrow \|v_1 + v_2\|_2^2 \leqslant \|v_1\|_2^2 + \|v_2\|^2 + 2 \cdot \|v_1\|_2 \cdot \|v_2\|$

$\Leftrightarrow \langle v_1 + v_2, v_1 + v_2 \rangle \leqslant \|v_1\|_2^2 + \|v_2\|_2^2 + 2\|v_1\|_2 \|v_2\|$

$\Leftrightarrow \cancel{\langle v_1, v_1 \rangle} + \cancel{\langle v_2, v_2 \rangle} + \cancel{2} \langle v_1, v_2 \rangle \leqslant \cancel{\|v_1\|_2^2} + \cancel{\|v_2\|_2^2} + 2\|v_1\|_2 \cdot \|v_2\|$

$\Leftrightarrow \langle v_1, v_2 \rangle \leqslant \|v_1\|_2 \cdot \|v_2\|_2$

Pour montrer l'inégalité triangulaire, il suffit de montrer que $\forall v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$ $\langle v_1, v_2 \rangle \leqslant \|v_1\|_2 \cdot \|v_2\|_2$

$\langle a+b, c+d \rangle$
$= \langle a, c \rangle +$
$\langle a, d \rangle +$
$\langle b, c \rangle +$
$\langle b, d \rangle$

Soit $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$ variable.

On sait que $\langle v_1 + \lambda v_2, v_1 + \lambda v_2 \rangle \geqslant 0 \quad \forall \lambda$

On développe : $\lambda^2 \|v_2\|_2^2 + 2\lambda \langle v_1, v_2 \rangle + \|v_1\|_2^2 \geqslant 0 \ \forall \lambda$

d'où $\Delta' \leqslant 0$, $\langle v_1, v_2 \rangle^2 - \|v_1\|_2^2 \|v_2\|_2^2 \leqslant 0$

$\Leftrightarrow (\langle v_1, v_2 \rangle)^2 \leqslant \|v_1\|_2^2 \cdot \|v_2\|_2^2$

$\Leftrightarrow \langle v_1, v_2 \rangle \leqslant \|v_1\|_2 \cdot \|v_2\|_2$ C.Q.F.D.

3) Soit $N : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^+$
$(x, y, z) \to |x + y - z|$

n'est pas une norme car $N((1,2,3)) = 0$ alors que $(1,2,3) \neq 0$.

4) Soit $N : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^+$

$$(x,y,z,t) \longrightarrow \sqrt{x^2+y^2+z^2+t^4}$$

n'est pas une norme car l'axiom d'homogénéité n'est pas satisfait : $\lambda = 5$, $x = y = z = 0$, $t = 1$

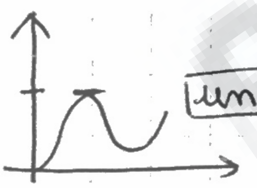
$N(\lambda(x,y,z,t)) = N(0,0,0,5) = \sqrt{5^4} = 5^2 \neq 5 = |\lambda|$

$= |\lambda| . N(0,0,0,1) = |\lambda| N(x,y,z,t)$

5) Soit $E = C([0,1], \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues de $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

On définit $\| \ \|_\infty : E \longrightarrow \mathbb{R}^+$

$$f \longrightarrow \operatorname{Max}\{|f(x)| \ ; x \in [0,1]\}$$



$\boxed{\text{un}}$ élément de E

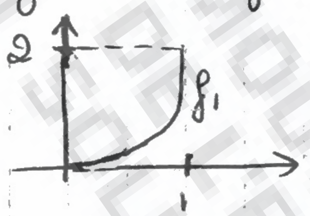
C'est une norme, appelée norme ∞, norme sup ou norme de la convergence uniforme.

<u>exemples</u> :

$f_1 : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}^+$

$\quad x \longrightarrow 2x^2$

$\|f_1\| = 2$

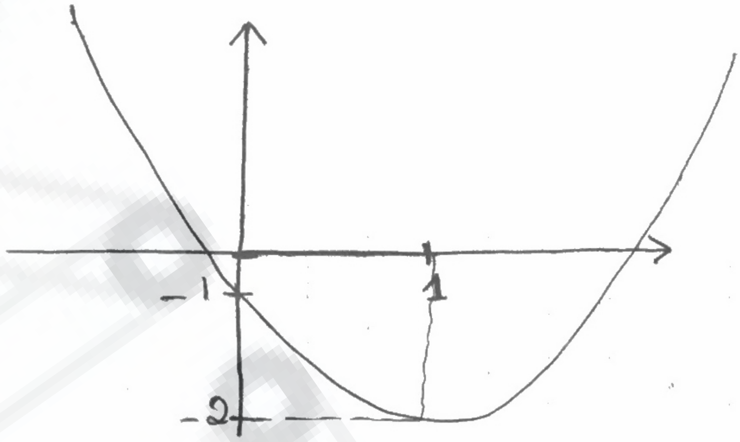


$f_2 : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$

$\quad x \longrightarrow x^2 - 2x - 1$

$f_2' = 2x - 2 = 2(x-1)$

x		1	
f_2'	$-$ ↘	0	$+$ ↗



max $\|f_2\|$ est atteint en 1 sur $[0;1]$ d'où
$\|f_2\| = |f_2(1)| = 2$

* Soit $f \in E$, $\|f\|_\infty = 0$ ssi $\operatorname{Max}\{|f(x)|, x \in [0;1]\} = 0$
or $\forall x$ $|f(x)| \geq 0$ d'où $\forall x \in [0;1]$ $|f(x)| = f(x) = 0$
d'où $f = 0$ (fonction nulle sur $[0;1]$)

* Soit $f \in C([0;1], \mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
alors $\|\lambda f\|_\infty = \operatorname{Max}\{|\lambda f(x)| ; x \in [0;1]\}$
car $|f(x)| \geq 0$, $|\lambda| \geq 0$
$= \operatorname{Max}\{|\lambda| . |f(x)| ; x \in [0;1]\} = |\lambda| . \|f\|_\infty$

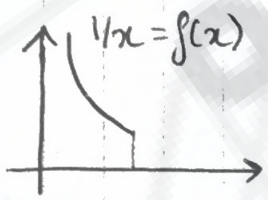
* Soient $f, g \in C([0;1], \mathbb{R})$, alors
inégalité triangulaire de $| \, |$ dans $\mathbb{R}$ et du max
$\|f+g\|_\infty = \operatorname{Max}\{|(f+g)(x)|, x \in [0;1]\}$
déf. de $f+g$
$= \operatorname{Max}\{|f(x) + g(x)|, x \in [0;1]\} \leq \operatorname{Max}\{|f(x)| + |g(x)|; x \in [0;1]\}$
propriétés du max
$\leq \operatorname{Max}\{|f(x)|; x \in [0;1]\} + \operatorname{Max}\{|g(x)|; x \in [0;1]\}$.
$\leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$

⚠ $\| \, \|_\infty$ est bien définie car comme f est continue l'application $[0;1] \to \mathbb{R}$
$x \mapsto |f(x)|$ est continue sur l'intervalle fermé borné $[0;1]$, donc bornée et atteint ses bornes. D'où $\operatorname{Max}\{|f(x)| ; x \in [0;1]\} \in \mathbb{R}^+$

6) Si on définit $N : C(]0;1[; \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^+$

$$f \longrightarrow \operatorname{Max}\{|f(x)| \,;\, x \in]0;1[\}$$

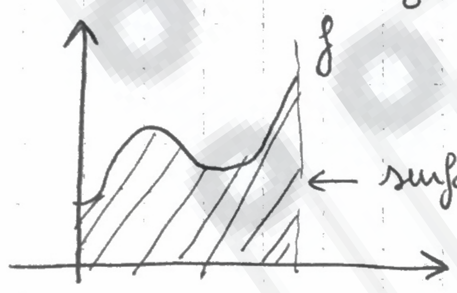
$C(]0;1[, \mathbb{R})$ étant l'ensemble des fonctions continues de $]0;1[\to \mathbb{R}$ alors N n'est pas une norme.
En fait, N n'est pas bien défini !

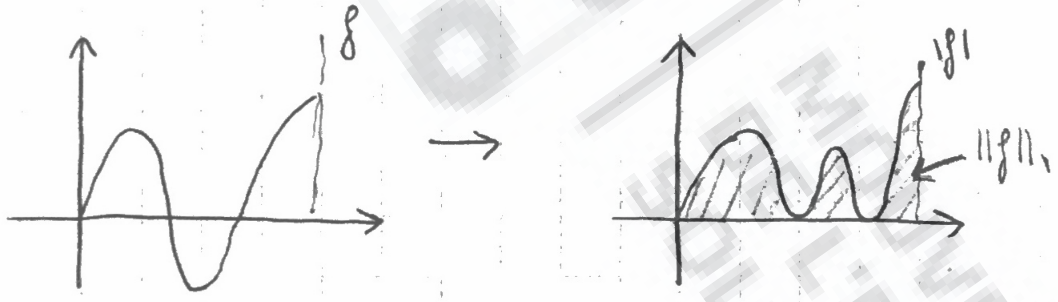


$\|f\|_\infty$ n'est pas défini (car max n'est pas défini)

7) Sur $C([0;1], \mathbb{R})$, on définit $\| \ \|_1$:

$$C([0;1], \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^+$$
$$f \longrightarrow \int_0^1 |f(x)|\, dx$$





- $\| \ \|_1$ est bien définie car l'application $x \to |f(x)|$ est continue et $[0;1]$ fermé borné
- Il est facile à vérifier que $\|\lambda f\|_1 = |\lambda| \cdot \|f\|_1$ et que $\|f+g\|_1 \leqslant \|f\|_1 + \|g\|_1$
- Si $f = 0$ alors $\|f\|_1 = \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 0\,dx = 0$

Reste à montrer que $\forall f \in C([0;1], \mathbb{R})$, si

$\|f\|_1 = 0$ alors $f(x) = 0 \ \forall x$. (On le fera en exercice)

<u>Récapitulation :</u>

Sur $\mathbb{R}^n$, pour n fixé, on a défini 3 normes :

$\rightarrow \| \ \|_1$: $\|(x_1, x_2, \dots, x_n)\| = |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|$

$|x|$, valeur absolue de x.

$\rightarrow \| \ \|_2$: $\|(x_1, \dots, x_n)\| = \sqrt{\Sigma |x_i|^2}$

$\rightarrow \| \ \|_\infty$: $\|(x_1, \dots, x_n)\| = \mathrm{Max}\{|x_i| ; i = 1, \dots, n\}$

Sur $C([a;b], \mathbb{R})$, on a défini 3 normes ;

$\rightarrow \|f\|_1 = \int_a^b |f(t)| dt$

$\rightarrow \|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2 dt}$

$\rightarrow \|f\|_\infty = \mathrm{Max}\{ |f(t)| , t \in [a;b]\}$

Sur $\mathbb{C}^n$, on peut définir $\| \ \|_1$, $\| \ \|_2$, ..., $\| \ \|_\infty$ par les mêmes formules, mais où $|x_i|$ dénotera le module du nb complexe x_i.

Sur $C([0;1], \mathbb{C})$, on peut définir $\| \ \|_1$, $\| \ \|_2$, ..., $\| \ \|_\infty$ avec les mêmes formules mais où $|f(t)|$ dénotera le module du nb complexe $f(t)$

1.2- Distance associée à une norme : convergence et continuité

<u>Définition :</u>

Une distance sur un ensemble E est une application

$d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}^+$

$(x, y) \rightarrow d(x, y)$ qui vérifie les propriétés suivantes :

$\rightarrow d(x,y) = 0$ ssi $x = y \quad \forall x,y \in E$

$\rightarrow d(x,y) = d(y,x) \quad \forall x,y \in E$

$\rightarrow \forall x,y,z \in E \quad d(x,y) + d(y,z) \geq d(x,z)$

Exemple: * Dans $\mathbb{R}^2$, l'application $d : ((a;b),(c;d)) \longrightarrow \sqrt{(c-a)^2 + (d-b)^2}$ est une distance.

≠ce des abscisses + ≠ des ordonnées ← * dans $\mathbb{R}^2$: l'application $d : ((a;b),(c;d)) \rightarrow |c-a| + |d-b|$ est une distance (à vérifier)

Proposition: Soit (E,N) un ev. normé, on définit

$$d : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}^+$$
$$(x,y) \longrightarrow N(x-y)$$

norme de $(x-y)$

Alors d est une distance associée à la norme N.

Preuve: d est bien définie.

* Soit $x,y \in E$, $d(x,y) = 0 \overset{\text{déf. de } d}{\Leftrightarrow} N(x-y) = 0 \overset{N \text{ est une norme}}{\Leftrightarrow} x-y$.

$\Leftrightarrow x = y$

* Soient $(x,y) \in E^2$. Montrons que $d(x,y) = d(y,x)$

$d(x,y) = N(x-y) = N((-1).(y-x)) \overset{\text{homogénéité}}{=} |-1|\, N.(y-x)$

$= N(y-x) = d(y-x)$

* Inégalité triangulaire : Soient $x,y,z \in E$.

Montrons que $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

$d(x,z) \overset{\text{définit°}}{=} N(x-z) = N((x-y)+(y-z)) \overset{\text{inégalité triangulaire de } N}{\leq} N(x-y) + N(y-z)$

$= d(x,y) + d(y,z)$

A partir d'une norme, on peut construire une distance.

⚠ La réciproque n'est pas vraie. On peut avoir un e.v. E et une distance d sur E qui ne provient pas d'une norme.

Exemple: Soit E un e.v. quelconque sur $\mathbb{R}$

$$d : E \times E \to \mathbb{R}^+$$
$$(x,y) \to \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq y \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

C'est une distance (à vérifier) et ça ne découle pas d'une norme (ex) (cette distance s'appelle la distance discrète sur E)

Exemples: 1) La distance associée à $\| \ \|_\infty$ de $\mathbb{R}^n$ est la distance définie par:
$$d_\infty((x_i),(y_i)) = \text{Max}\{(x_1,y_1),(x_2,y_2),\dots,(x_n,y_n)\}$$

2) La distance associée à $\| \ \|_1$ de $\mathbb{R}^n$ est la distance
$$d_1((x_i),(y_i)) = |x_1-y_1|+|x_2-y_2|+\dots+|x_n-y_n|$$

3) La distance associée à $\| \ \|_1$ de $C([2,3],\mathbb{R})$ est la distance d_1 définie par: $d_1(f,g) = \int_2^3 |f(t)-g(t)|\,dt$

$$d_1(x \to x^2, x \to x^3) = \int_2^3 |x^2 - x^3|\,dx = \int_2^3 x^3 - x^2 = \dots$$

Définition: 1) Soit (E,N) un e.v.n. (normé) Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de E, et $x \in E$. On dit que la suite (x_n) converge vers x, ou que x est la limite de (x_n) si $\lim\limits_{n\to+\infty} \underbrace{N(x_n - x)}_{d(x_n,x)} = 0$

Ceci est équivalent à dire que :
$\forall \varepsilon > 0 \ , \ \exists N \ \forall n \geq N \ , \ N(x_n - x) < \varepsilon$

Dans ce cas, on dit que la suite (x_n) converge et on écrit $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = x$

<u>Exemple :</u> Soit $E = \mathcal{C}([0,1] ; \mathbb{R})$
Soit $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n : \begin{array}{l} [0;1] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longrightarrow x^n \end{array}$, $f_n \in E$

- On considère $\| \ \|_1$ sur E. Dans $(E, \| \ \|_1)$, $(f_n)_n$ est-elle convergente ?

Dans $(E, \| \ \|_1)$, (f_n) converge vers la fonction nulle car $\lim\limits_{n \to +\infty} \| f_n - \underset{\substack{\uparrow \\ \text{fct° nulle}}}{0} \|_1 = \lim\limits_{n \to +\infty} \| f_n \|_1 = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(\int_0^1 x^n \right)$

$= \lim\limits_{n \to +\infty} \left[\dfrac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1$

et $x = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0$

$= \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0$

- On considère E avec $\| \ \|_\infty$. $(f_n)_n$ converge tjs vers la fct° nulle ?

Non, car $\lim\limits_{n \to +\infty} \| f_n - 0 \|_\infty = \lim\limits_{n \to +\infty} \| f_n \|_\infty$

$= \lim\limits_{n \to +\infty} \max \{ |x^n| , x \in [0;1] \} = \lim\limits_{n \to +\infty} 1 = 1 \neq 0$.

⚠ On peut montrer que, dans l'exemple précédent, $(f_n)_n$ n'est pas convergente dans $(\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R}), \| \ \|_\infty)$ (exercice)

⚠ Dans la définition de convergence dans (E, N), on ne peut pas remplacer $\lim (N(x - x_n)) = 0$ par $\lim (N(x) - N(x_n)) = 0$ ou $\lim (N(x_n)) = N(x)$

Exemple : On peut trouver une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui diverge dans un espace E mais converge dans un espace plus grand comme par exemple la suite $x_n = \dfrac{E(10^n\sqrt{2})}{10^n} \in \mathbb{Q}$, elle diverge dans $\mathbb{Q}$ mais converge dans $\mathbb{R}$ vers $\sqrt{2}$.

Conclusion : La notion de convergence dépend de :

- L'espace dans lequel on travaille
- La norme considérée

Définition : Soit E un e.v.n. et N_1, N_2 deux normes sur E. On dit que N_1 et N_2 sont équivalentes ($N_1 \sim N_2$) ssi il existe $\alpha, \beta > 0$ t.q. $\forall x \in E$, $\alpha N_2(x) \leq N_1(x) \leq \beta N_2(x)$ ceci équivaut à dire que $\dfrac{N_1}{N_2}$ et $\dfrac{N_2}{N_1}$ sont bornées (sur E)

Exemple : $E = \mathcal{C}([0;1], \mathbb{R})$, $\| \|_\infty$ et $\| \|_1$ ne sont pas équivalents car $\dfrac{\| \|_\infty}{\| \|_1}$ n'est pas bornée sur E.

Soit $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longrightarrow x^n$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\|f_n\|_1 = \dfrac{1}{n+1}$ $\qquad \|f_n\|_\infty = 1$

$$\frac{\|f_n\|_\infty}{\|f_n\|_1} = \frac{1}{\frac{1}{n+1}} = n+1$$

On a $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\|f_n\|_\infty}{\|f_n\|_1} = +\infty$, d'où $\dfrac{\| \|_\infty}{\| \|_1}$ n'est pas bornée.

⚠ * Pour montrer que 2 normes N_1 et N_2 ne sont pas équivalentes sur E, il suffit de trouver une suite $(x_n)_n$ d'éléments de E t.q. $(N_1(x_n))_n$ est bornée et la suite $(N_2(x_n))_n$ n'est pas bornée. On aura donc $\frac{N_2}{N_1}$ non bornée.

* De même, pour montrer que $N_1 \not\sim N_2$, il suffit de trouver une suite $(x_n)_n$ de E t.q.

$$N_1(x_n) \longrightarrow 0 \quad \text{et} \quad N_2(x_n) \not\longrightarrow 0$$

Dans ce cas, on aura que $\frac{N_2}{N_1}$ non bornée.

<u>Exemple:</u> On considère $\mathbb{R}[X]$. Sur $\mathbb{R}[X]$, je définis :

$\|\ \|_1 : \|a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n\|_1 = \sum_{i=0}^{n} |a_i|$

$\|\ \|_2 : \|a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n\|_2 = \sqrt{\sum_{i=0}^{n} a_i^2}$

$\|\ \|_\infty : \|a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n\|_\infty = \max\{|a_i|,\ i = 0, \dots, n\}$

a) Montrer que ce sont des normes

b) Montrer qu'elles ne sont pas équivalentes (aucune n'est équivalente à l'autre).

b) On considère pour tout $n \in \mathbb{N}$, le polynome $P_n : 1 + x + x^2 + \dots + x^n$

Soit n fixé : $\|P_n\|_1 = n + 1$

$\|P_n\|_2 = \sqrt{n+1}$

$\|P_n\|_\infty = 1$

$\frac{\|P_n\|_1}{\|P_n\|_2} = \sqrt{n+1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$, non borné d'où $\|\ \|_1 \not\sim \|\ \|_2$

$*\ \dfrac{\|P_n\|_2}{\|P_n\|_\infty} = \sqrt{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ d'où $\|\ \|_2 \not\sim \|\ \|_\infty$

$*\ \dfrac{\|P_n\|_1}{\|P_n\|_\infty} = n+1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ d'où $\|\ \|_1 \not\sim \|\ \|_\infty$

<u>Exercice</u>: Montrons que, pour $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, les normes $\|\ \|_1$, $\|\ \|_2$ et $\|\ \|_\infty$ sont équivalentes dans $\mathbb{R}^n$.

<u>Preuve</u>: Soit $x : (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Montrons d'abord que : $\|x\|_1 \geq \|x\|_2 \geq \|x\|_\infty$.

<u>$\|x\|_1 \geq \|x\|_2$</u> : $\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|$

$\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$

$\|x\|_1 \geq \|x\|_2 \Leftrightarrow \|x\|_1^2 \geq \|x\|_2^2$

$\Leftrightarrow \cancel{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2} + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} |x_i| . |x_j| \geq \cancel{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}$

$\Leftrightarrow 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} |x_i| |x_j| \geq 0$ tjs vérifiée

<u>$\|x\|_2 \geq \|x\|_\infty$</u> : $\|x\|_2 \geq \|x\|_\infty$

$\Leftrightarrow \sqrt{\sum x_i^2} \geq \max\{|x_i|,\ i = 1, \dots, n\}$

$\Leftrightarrow \sum |x_i|^2 \geq \max\{|x_i|,\ i = 1, \dots, n\}$ toujours vérifiée car si $\max\{|x_i|,\ i = 1, \dots, n\} = x_{i_0}$, alors

$$\sum |x_i|^2 = |x_{i_0}|^2 + \underbrace{\sum_{i \neq i_0} |x_i|^2}_{\geq 0}$$

On remarque que $\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|$

$\leq \underbrace{\|x\|_\infty + \|x\|_\infty + \dots + \|x\|_\infty}_{n \text{ fois}}$

$\leq n . \|x\|_\infty$ (n fixé, constante)

Conclusion: $n.\| \ \|_\infty \geqslant \| \ \|_1 \geqslant \| \ \|_2 \geqslant \| \ \|_\infty$
d'où $\dfrac{\| \ \|_\infty}{\| \ \|_1}$ est bornée par 1 et $\dfrac{\| \ \|_1}{\| \ \|_\infty}$ est bornée par n d'où $\| \ \|_\infty \sim \| \ \|_1$.
$\dfrac{\| \ \|_\infty}{\| \ \|_2}$ est bornée par 1 et $\dfrac{\| \ \|_2}{\| \ \|_\infty}$ est bornée par n d'où $\| \ \|_\infty \sim \| \ \|_2$.
De même, $\| \ \|_2 \sim \| \ \|_1$.

Soit E un e.v. et soit F l'ensemble de toutes les normes sur E. La relation « $\sim$ » (équivalence de normes) est une relation d'équivalence sur F c.à.d. reflexive, symétique et transitive.

transivité: Si $N_1 \sim N_2$ et $N_2 \sim N_3$ alors $N_1 \sim N_3$

Proposition: Soit E un e.v. et N_1, N_2 deux normes sur E alors $N_1 \sim N_2$ ssi toute suite de E qui converge pour l'une des normes converge aussi pour l'autre.

Preuve: $\boxed{\Rightarrow}$ Supposons que $\alpha N_1 \leq N_2 \leq \beta N_1$ $\alpha, \beta > 0$
Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite qui converge vers x pour l'une des normes, sans perte de généralité, N_1.

$$0 \leq N_2(x - x_n) \leq \beta N_1(x - x_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$ d'où $\lim N_2(x - x_n) = 0$ et (x_n) converge pour la norme N_2.

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons que les normes N_1 et N_2 ne sont pas équivalentes. Montrons qu'il existe une suite y_n qui converge pour l'une et diverge pour l'autre.

Sans perte de généralité, on peut supposer que $\frac{N_1}{N_2}$ n'est pas bornée. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on peut trouver $x_n \in E$ t.q. $\frac{N_1(x_n)}{N_2(x_n)} > n$.

Posons pour tout n, $y_n = \frac{x_n}{\sqrt{n} \cdot N_2(x_n)}$

$$N_2(y_n) = N_2\Big(\underbrace{\frac{x_n}{\sqrt{n}\cdot N_2(x_n)}}\Big) = \frac{1}{\sqrt{n}\, N_2(x_n)} N_2(x_n)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

D'où y_n converge vers 0 pour N_2.

$$N_1(y_n) = N\Big(\underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}\cdot N_2(x_n)}}_{\lambda} \cdot x_n\Big) = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \underbrace{\frac{N_1(x_n)}{N_2(x_n)}}_{>n}$$

$$> \frac{n}{\sqrt{n}} \geqslant \sqrt{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$$

D'où $(y_n)_n$ diverge dans E pour la norme N_1.

<u>Définition</u>: Soient (E,N) et (E',N') 2 e.v.n. et soit $f : E \to E'$ une fonction. Soit $a \in E$.

1) On dit que f est continue au point a ssi pour toute suite $(x_n)_n$ d'éléments de E qui tend vers a ($\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$) pour la norme N, la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $f(a)$ pour la norme N'.

2) On dit que f est continue ssi f est continue en tout point a de E.

⚠ 1- Soit $f : (E,N) \to (E',N')$ une fonction.
Alors f est continue ssi $\forall a \in E, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$
$\forall x ; N(x-a) < \delta \Rightarrow N'(f(x) - f(a)) < \varepsilon$

2- Si f est continue, on peut écrire $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ et si $(x_n)_n$ est une suite dans E.

$\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = f(\lim_{n \to +\infty} x_n)$ (lorsque les limites existent pour N, N' respectivement)

<u>Exemple :</u> Si (E, N) est un e.v.n.
alors $N : E \to \mathbb{R}$
$x \to N(x)$ est tjs continue (pour la norme N) (évident)

<u>Preuve :</u> $\to$: Soit $a \in E$ et soit $\varepsilon > 0$. Il suffit de montrer qu'il existe $\delta > 0$ t.q. $\forall x$, si $N(x-a) < \delta$ alors $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ c.à.d. $|N(x) - N(a)| < \varepsilon$.
ε est donné, on prend $\delta = \varepsilon$.
Comme $|N(x) - N(a)| \leq N(x-a)$ alors si $N(x-a) < \varepsilon$, on a $|N(x) - N(a)| < \varepsilon$

$N(x-y) \geq |N(x) - N(y)|$?
$\to$ $N(x) = N((x-y)+y) \leq N(x-y) + N(y)$
$N(x) - N(y) \leq N(x-y)$
De même, $N(y) - N(x) \leq N(y-x) = N(x-y)$
d'où $|N(x) - N(y)| \leq N(x-y)$

<u>Proposition :</u> Soient E et E' deux e.v.n., N_1 et N_2 deux normes sur E et N_1' et N_2' deux normes sur E'. Soit $f : E \to E'$ une fonction. Alors si $N_1 \sim N_2$ et $N_1' \sim N_2'$ alors f est continue pour les normes N_1 et N_1' ssi f est continue pour les normes N_2 et N_2'.

Preuve : Supposons que f est continue.
$(E, N_1) \to (E', N_1')$

Montrons que f est continue $(E, N_2) \to (E', N_2')$.
Soit $a \in E$ et $(x_n)_n$ une suite dans E, qui converge vers a pour N_2. Montrons que $(f(x_n))_n$ converge vers $f(a)$ pour N_2'.

$x_n \to a$ pour N_2 dans E.

$\overset{N_2 \sim N_1}{\Longrightarrow}$ $x_n \to a$ pour N_1 dans E

f c° % aux normes N_1 et N_1' $\Longrightarrow$ $(f(x_n))_n \to f(a)$ pour N_1' dans E'.

$\overset{N_1' \sim N_2'}{\Longrightarrow}$ $f(x_n) \to f(a)$ pour N_2' dans E' $\Rightarrow$ C.Q.F.D.

Exemple : Soit $E (C[0,1], \mathbb{R})$

Soit $f : E \to \mathbb{R}$

$$f \to \int_0^1 |f(x)|\, dx$$

* $f_n : x \to x^n$

Si on considère $\| \|_1$ sur E, et $| \ |$ sur $\mathbb{R}$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n = 0$ (fct° nulle)

$$F(f_n) = \frac{1}{n} \to 0 \text{ de } \mathbb{R}$$

F est une fct° continue.

Proposition : Soient N_1 et N_2 deux normes sur E alors $N_1 \sim N_2$ ssi l'identité $id : (E, N_1) \to (E, N_2)$ est bicontinue (c.à.d. $id : (E, N_1) \to (E, N_2)$ est c° et $id : (E, N_2) \to (E, N_1)$ est c°)

Preuve : exercice.

Proposition : * Si f est continue et $\lambda \in K$ alors λf est continue.

$f : E \to F$ est continue :

$\forall a \in E, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \quad N(x-a) < \delta \Rightarrow N'(f(x) - f(a)) < \varepsilon$.

* Si f, g sont continues, $f+g$ et $g \circ f$ sont continues.
* Les fonctions constantes sont continues.

⚠ Dans la définition de la continuité, le δ en question dépend de a et de ε.

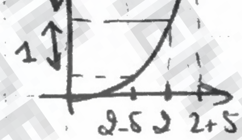
<u>Question</u> : Peut-on trouver un δ qui ne dépend que de ε et qui marche pour tous les a ?
Si oui, on parle alors de continuité uniforme.

<u>Définition</u> : Soit $f (E, N) \longrightarrow (E', N')$ une fonction.
On dit que f est uniformément continue
ssi $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall a \in E, \forall x \in E \quad N(x-a) < \delta \Rightarrow N'(f(x) - f(a)) < \varepsilon$

⚠ Si une fonction est uniformément continue, alors elle est continue (clair car l'énoncé $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall a \quad N(x-a) < \delta \Rightarrow N'(f(x) - f(a)) < \varepsilon$, est plus fort que l'énoncé $\forall a \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \quad N(x-a) < \delta \Rightarrow N'(f(x) - f(a)) < \varepsilon$) (En fait un énoncé de la forme $\exists y \ \forall x \quad P(x,y)$ est plus fort que $\forall x \ \exists y \ P(x,y)$) S'il y a un δ qui marche pour tous les a, alors ce δ marche pour un a spécifique.

Dans $\mathbb{N}$, $P(x,y)$ est la relat° $y = x+1$. On sait que $\forall x \ \exists y \ P(x,y)$ mais $\exists y \ \forall x \ P(x,y)$ est faux

<u>Exemples</u> : 1- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to x^2$ est continue. uniformément continue ?



ε fixé ($\varepsilon = 1$)
Si je donne a (ex. $a = 2$).

trouver δ t.q. si $|x-a| < \delta$ alors $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$

$|x^2 - 2^2| < 1$

$|x-2| \underbrace{|x+2|}_{< 2+2 = 4} < 1$

Si on prend $|x-2| < \frac{1}{8}$ ce sera vérifié.

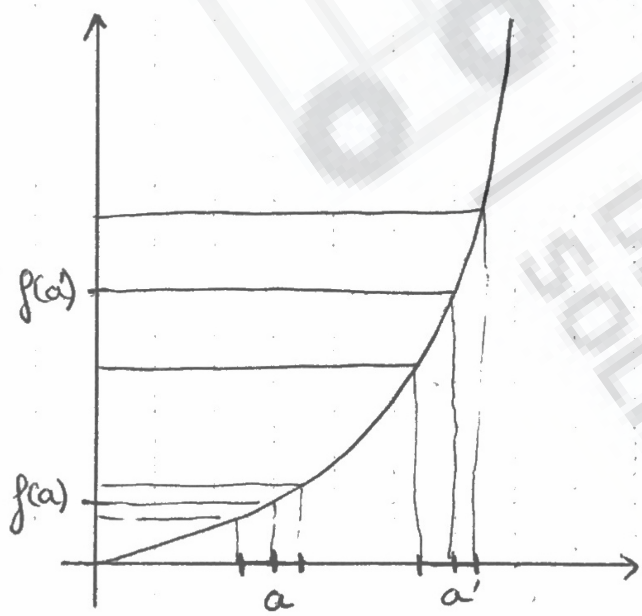
$a > 0$. Plus généralement, pour avoir $|x^2 - a^2| < 1$ c.à.d. $|x-a||x+a| < 1$, il suffit d'avoir $x < 2a$ et $|x-a| < \frac{1}{2a}$

$\delta = \inf\{2a, \frac{1}{2a}\}$

non! δ dépend toujours de a.

Pour δ fixé, la distance entre $f(a + \frac{\delta}{2})$ et $f(a)$ sera strictement + grande que ε, pour a suffisement grand. (en fait $\left(f(a + \frac{\delta}{2}) - f(a)\right) \xrightarrow[\substack{a \to +\infty \\ \delta \text{ fixé}}]{} +\infty$

$|f(a + \frac{\delta}{2}) - f(a)| = (a + \frac{\delta}{2})^2 - a^2 = \frac{\delta}{2}(2a + \frac{\delta}{2}) \xrightarrow[a \to +\infty]{} +\infty$

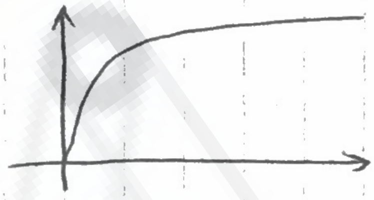


Pour le même intervalle autour de a, on obtient des images + éloignées de $f(a)$.

2- * Sur $\mathbb{R}$, la fonction $x \to x$ est uniformément continue.

* Sur $[1;+\infty[$, la fonction $x \to \sqrt{x}$ est uniformément continue (c'est vrai en fait sur $[0;+\infty[$).

En effet, $\forall x \; \forall a \geq 1 \quad |\sqrt{x} - \sqrt{a}| < |x-a|$



Pour avoir $|\sqrt{x} - \sqrt{a}| < \varepsilon$, il suffit d'avoir $|x-a| < \varepsilon$.
On prend alors $\delta = \varepsilon$ (ne dépend pas de x)

* $\ln : [1;+\infty[\to \mathbb{R}$ est uniformément continue

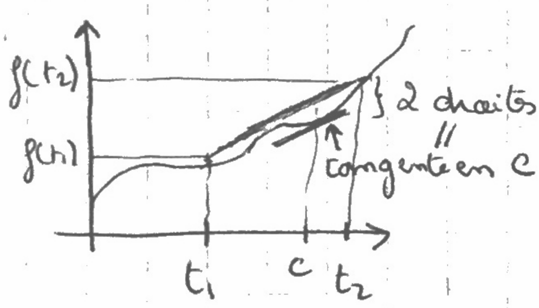
Pour montrer ça : * soit on montre que sur $[1;+\infty[$
$\forall x, a \quad |\ln(x) - \ln(a)| \leq |x-a|$ on prend alors
$\delta = \varepsilon$, indépendant de a.

* Soit on montre que $|\ln(a+\delta) - \ln(a-\delta)| \leq |\ln(1+\delta) - \ln(1-\delta)|$

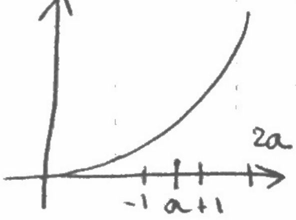
Dans ce cas, on prend pour δ celui avec
$|\ln(a+\delta) - \ln(a-\delta)| < \varepsilon$

$$\frac{|\ln x - \ln a|}{x-a} = \frac{1}{c} \Big\} \leq 1 \Rightarrow |\ln(x) - \ln(a)| \leq x-a \quad \text{avec } a \leq c \leq x \quad c \geq 1$$

Théorème des accroissements finis :



$\forall t_1, t_2 \quad \exists c \quad \dfrac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1} = f'(c)$



$$|f(x) - f(a)| = |x^2 - a^2| = |x-a||x+a| < \varepsilon$$
$$|x-a| < \frac{\varepsilon}{x+a}$$

Il suffit d'avoir $|x-a| < \delta$ et $\delta < \frac{\varepsilon}{x+a}$.

$x \longrightarrow x^2$ sur $\mathbb{R}$ non uniformément continue.

$x < 2a$. Sans perte de généralité, on peut supposer $x \in]a-1\,;\,a+1[$

- Si $x \in]a-1\,;\,a+1[$ alors $\frac{\varepsilon}{x+a} \geqslant \frac{\varepsilon}{a+1+a}$,

$$\frac{\varepsilon}{x+a} \geqslant \frac{\varepsilon}{2a+1}$$

On prend $\delta = \frac{\varepsilon}{2a+1}$

Si $|x-a| < \frac{\varepsilon}{2a+1}$ dans $x \in]a-1\,;\,a+1[$ alors $|x-a| < 1$

$$\underbrace{|x-a| < \frac{\varepsilon}{x+a}}_{|f(x)-f(a)| < \varepsilon}$$

$$\delta = \min\left\{\frac{\varepsilon}{2a+1}\,;\,1\right\}$$

1.3- Suppléments topologiques :

Suites de Cauchy

* <u>Idée intuitive</u> : Dans un e.v.n., informellement, une suite de Cauchy est une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, si p et $q \in \mathbb{N}$ sont très grandes, alors la distance de x_p à x_q $(N(x_p - x_q))$ devient très petite.
Si p et q augmentent infiniment, alors $N(x_p - x_q)$ tend vers 0.

<u>Exemples</u> : 1) $x_n = (-1)^n \quad (n \in \mathbb{N}) \qquad 1, -1, 1, -1, \ldots$

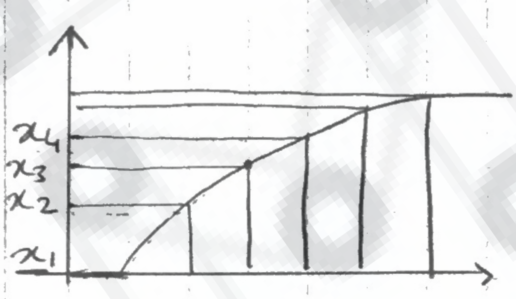
Ce n'est pas une suite de Cauchy

Pour $q = p+1$ si $p \to +\infty$ (donc $q \to +\infty$)

$d(x_p, x_q) = 2 \not\to 0$

2) $x_n = n \quad n \in \mathbb{N}$ n'est pas une suite de Cauchy car si $p \neq q$, $d(x_p, x_q) \geq 1$ donc si $q = p+1$ par exemple et $p \to +\infty$, $d(x_p, x_q) \not\to 0$.

3) $x_n = \ln(n) \quad (n > 0)$



$x_{n+1} - x_n = \ln(n+1) - \ln(n)$
$= \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln(\underbrace{1 + \frac{1}{n}}_{\to 1}) \to 0$

n'est pas une suite de Cauchy (même si $\lim\limits_{n \to +\infty} |x_{n+1} - x_n| = 0$)

car : $* \; |\underbrace{x_{n^2}}_{q} - \underbrace{x_n}_{p}| = \ln(n^2) - \ln(n) = \ln(n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \infty \neq$

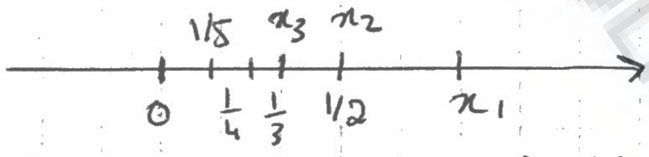
ou $* \; |\underbrace{x_{2n}}_{q} - \underbrace{x_n}_{p}| = \ln(2n) - \ln(n) = \ln(2) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ln(2) \neq 0$

4) $x_n = \sqrt{n}$ n'est pas une suite de Cauchy.

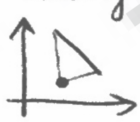
5) $x_n = n^2$ n'est pas une suite de Cauchy

6) $x_n = \sin n$??

7) $x_n = \frac{1}{n} \; (n \in \mathbb{N}^*)$ C'est une suite de Cauchy.



car si p, q augmentent indéfiniment, alors
$x_p \left(= \frac{1}{p}\right)$ s'approche infiniment de 0
et $x_q \left(= \frac{1}{q}\right)$ s'approche infiniment de 0 $\Big\} \Rightarrow$ inégalité triangulaire



x_p et x_q s'approchent infiniment l'une de l'autre.

$\frac{E(10^5 \sqrt{2})}{10^5} = \frac{141421}{10^5} = 1,41421$

8) Pour $n \in \mathbb{N}$, $x_n = \sin(n\pi)$ Suite de Cauchy ?

9) $x_n = \cos(n\pi)$ Suite de Cauchy ?

10) Pour $n \geqslant 1$, je définis $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$

$$\left\{ \begin{array}{ll} x_1 = 1 & x_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \\ x_2 = 1 + \frac{1}{2} & x_4 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \end{array} \right\}$$

Suite de Cauchy ?

$q = 2p$

$$|x_p - x_q| = \frac{1}{p+1} + \frac{1}{p+2} + \dots + \frac{1}{q} = \frac{1}{p+1} + \frac{1}{p+2} + \dots + \frac{1}{2p}$$

$$\geqslant \frac{1}{2p} + \frac{1}{2p} + \frac{1}{2p} + \dots + \frac{1}{2p} \geqslant p \cdot \frac{1}{2p} = \frac{1}{2} \underset{p \to +\infty}{\not\longrightarrow} 0$$

$\Rightarrow$ Ce n'est pas une suite de Cauchy

11) $\sqrt{2} = 1,414213562\dots$

$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, la suite $1,4$; $1,41$; $1,414$; $1,4142$; $1,41421$; $1,414213$; $1,4142135\dots$

c.à.d. $x_n = \frac{E(10^n \sqrt{2})}{10^n}$ dans $\mathbb{R}$, c'est une suite de Cauchy qui converge vers $\sqrt{2}$.

Dans $\mathbb{Q}$, c'est une suite de Cauchy qui n'est pas convergente (car $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$)

* Toute suite convergente (dans $\mathbb{R}$) est une suite de Cauchy (la réciproque est vraie)
* Une suite de Cauchy non convergente existe mais pas dans $\mathbb{R}$.

<u>Définition :</u> Soit (E, d) un espace métrique (par exemple E est un e.v.n. et d la distance associée à la norme)

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E.
On dit que x_n est une suite de Cauchy ssi
$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall p,q \geq N \quad \underbrace{d(x_p, x_q)}_{N(x_p - x_q)} < \varepsilon$

de façon équivalente, ssi $\lim\limits_{\substack{p\to+\infty \\ q\to+\infty}} d(x_p, x_q) = 0$.

Théorème : Soit (E,N) un e.v.n. (ou (E,d) un espace métrique). Soit $(x_n)_n$ une suite dans E, qui converge vers $a \in E$ alors $(x_n)_n$ est une suite de Cauchy.

Preuve : Soit $\varepsilon > 0$ car $\lim x_n = a$, alors $\exists N$ t.q. $\forall n \geq N \quad d(x_n, a) < \frac{\varepsilon}{2}$

Soient $p, q > N$ alors : $\left.\begin{array}{l} d(x_p, a) < \frac{\varepsilon}{2} \\ d(x_q, a) < \frac{\varepsilon}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow$

inégalité triangulaire

$$d(x_p, x_q) \leq d(x_p, a) + d(x_q, a) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

C.Q.F.D

Question : Si une suite $\to +\infty$ (ex : $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$) peut-elle être une suite de Cauchy ?

Non, car toute suite de Cauchy est bornée

Proposition : Soit (E,d) un espace métrique, $(x_n)_n$ une suite de Cauchy dans E. Alors $(x_n)_n$ est bornée (c.à.d. $\exists a \in E$, $\exists M \in \mathbb{R}^+$ t.q. tous les x_n sont à une distance au plus M de a, c.à.d. $\forall n,\ d(x_n, a) \leq M$)

Preuve: Soit $a \in E$ et posons $\varepsilon = 1$. Comme (x_n) est de Cauchy alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ t.q.

$\forall\, p, q \geqslant n_0$, $d(x_p, x_q) \leqslant 1$.

En particulier, $\forall\, q \geqslant n_0$, $d(x_{n_0}, x_q) \leqslant 1$

Soit $M = \max\{1, \underbrace{d(x_{n_0}, x_1), d(x_{n_0}, x_2), \dots, d(x_{n_0}, x_{n_0}}_{\text{nb fini}}$

$M \in \mathbb{R}^+$ et $\forall\, n$, $d(x_n, x_{n_0}) \leqslant M$

On prend $a = x_{n_0}$.

* convergente $\Rightarrow$ de Cauchy $\Rightarrow$ bornée

⚠ Dans certains e.v.n. ou espaces métriques (E, d), on a la propriété que toute suite de Cauchy est convergente c.à.d. $\forall\, (x_n)_n$, suite dans E, si (x_n) est une suite de Cauchy alors $\exists\, a \in E$, t.q. x_n converge vers a.

exemple: $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ (on va le montrer)

D'autres espaces n'ont pas cette propriété: $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R}^*$ (espace métrique, ce n'est pas un e.v.n.)

$\frac{1}{n}$ est une suite de Cauchy de $\mathbb{R}^*$ qui ne converge pas dans $\mathbb{R}^*$.

Questions: 1) $E = \{ f \in C([0;1], \mathbb{R})$; f est une fonction polynomiale$\}$

On considère $(E, \| \|_1)$ et $(E, \| \|_\infty)$

Peut-on trouver des suites de Cauchy dans $(E, \| \|_1)$ ou $(E, \| \|_\infty)$ qui ne sont pas convergentes?

Suite de polynômes:

1

$1 + x$

$1 + x + x^2$

$1 + x + x^2 + x^3$

$\to \frac{1}{1-x}$

× polynôme

2) $(C[0;1], \| \|_\infty)$ a-t-il la propriété que toute suite de

1

$1 + x$

$1 + x + \frac{x^2}{2!}$

$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}$

$x \to e^x$

$\sum \frac{1}{n^2}$: $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4} + \cdots \longrightarrow \frac{\pi^2}{6}$

Cauchy converge ?

<u>Définition</u>: Soit (E,d) un espace métrique. On dit que (E,d) est complet ssi toute suite de Cauchy de (E,d) converge vers un élément de (E,d)

<u>Exemple</u>: $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}^*$ ne sont pas complets

<u>Proposition</u>: $\mathbb{R}$ est complet.

Soit $(x_n)_n$ une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$. Montrons que $(x_n)_n$ converge.

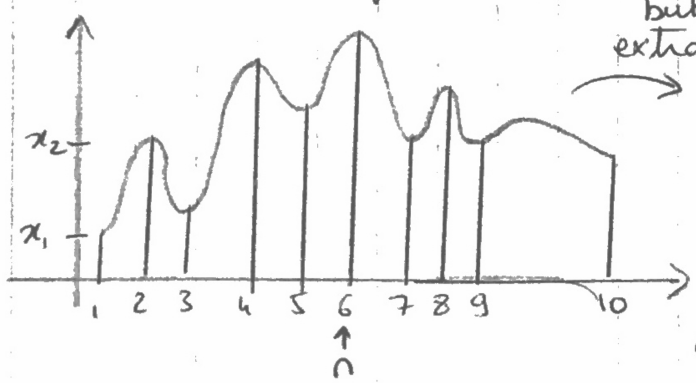
– <u>étape 1</u>: Toute suite de Cauchy admettant une sous-suite convergente est elle-même convergente

– <u>étape 2</u>: Il suffit de trouver une sous-suite de $(x_n)_n$ qui converge (d'après l'étape 1)

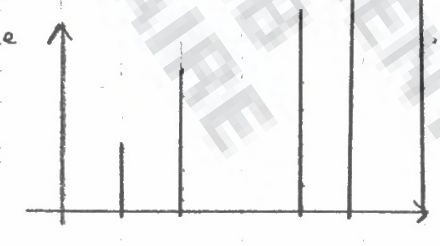
On va trouver une sous-suite $(y_n)_n$ de x_n qui est monotone. Comme $(x_n)_n$ est de Cauchy, alors $(x_n)_n$ est bornée et $(y_n)_n$ l'est aussi.

$(y_n)_n$ sera soit croissante majorée, soit décroissante minorée. Donc, dans tous les cas elle sera une sous-suite convergente de $(x_n)_n$.

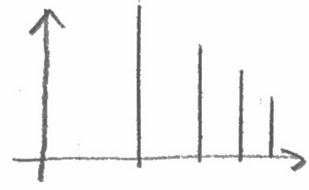
Reste à montrer que la suite $(x_n)_n$ admet une sous-suite (infini) qui est soit $\nearrow$ soit $\searrow$.



but : extraire



ou



Je définis « un sommet » $n \in \mathbb{N}$ t.q. $\forall m \geq n$, $x_m \leq x_n$

<u>1er cas</u> : la suite $(x_n)_n$ admet une infinité de sommets $n_1, n_2, n_3, n_4, \dots$ alors la sous-suite
$y_1 = x_{n_1}$, $y_2 = x_{n_2}$, $y_3 = x_{n_3}$, ... est une sous-suite
↘ infini dans x_n

<u>2ème cas</u> : (x_n) admet un nombre fini de sommets $n_1 < n_2 < \dots < n_p$.
Soit $p = n_p + 1$, p n'est pas un sommet, alors il existe ~~alors il existe~~ $m_2 \geq p$ avec $x_{m_2} \geq x_p$
or m_2 n'est pas un sommet alors $\exists\, m_3 \geq m_2$ avec $x_{m_3} \geq x_{m_2}$ --- ainsi de suite.
On construit une sous-suite infinie.
$x_{m_2} \leq x_{m_3} \leq x_{m_4} \leq x_{m_5} \dots$
Sous-suite extraite et croissante de (x_n)

<u>Proposition</u> : (à admettre)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie.
N_1, N_2 deux normes sur E
Alors $N_1 \sim N_2$

<u>Remarque</u> : On a, en effet, déjà montré que sur $\mathbb{R}^n$, n fixé, $\| \|_1 \sim \| \|_2 \sim \| \|_\infty$
- $(C[0;1], \mathbb{R})$ est de dimension infinie, et sur cet espace, $\| \|_1 \nsim \| \|_\infty$ (déjà montré)
- Sur $\mathbb{R}[X]$, $N_1 \nsim N_2 \nsim N_\infty$ (déjà montré)

<u>Théorème</u> : Soit E un espace vectoriel de dimension finie

sur $\mathbb{R}$. Alors E est complet

Idée de la preuve : E est de dimension finie, donc E est isomorphe à $\mathbb{R}^n$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Comme toutes les normes sur $\mathbb{R}^n$ sont équivalentes (proposition précédente) il suffit de montrer que $(\mathbb{R}^n, \| \|_\infty)$ est complet.

Soit, pour tout p, $x_p = (x_p^1, x_p^2, \ldots, x_p^n) \in \mathbb{R}^n$ ← indice
t.q. $(x_p)_p$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}^n$.
Il faut montrer que la suite converge dans $(\mathbb{R}^n, \| \|_\infty)$.

Ceci équivaut à dire que $\forall i \leq n$, la suite $(x_p^i)_{p \in \mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{R}$ or si $(x_p)_p$ est de Cauchy il en est de même pour $(x_p^i)_{p \in \mathbb{N}}$ $\forall i$ et on a convergence car $\mathbb{R}$ est complet C.Q.F.D.

Remarque : Si $\forall p$, $x_p = (x_p^1, x_p^2, \ldots, x_p^n) \in \mathbb{R}^n$, et N une norme sur $\mathbb{R}^n$, comme $N \sim \| \|_\infty$ alors dire que $x_p \longrightarrow (a, \ldots, a_n)$ dans $(\mathbb{R}^n, N)$ revient à dire que $\forall i \leq n$, la suite $(x_p^i)_{p \in \mathbb{N}} \longrightarrow a^i$ dans $(\mathbb{R}, | \, |)$

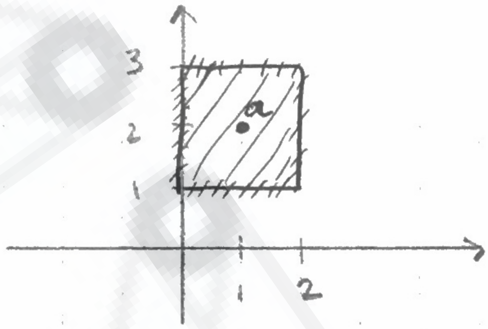
Définition : Soit (E, d) un espace métrique. Soit $a \in E$, $r \in \mathbb{R}^+$.

$*$ La boule ouverte de centre a et de rayon r
peut-être → C'est l'ensemble : $B(a,r) = \{x \in E \, ; \, d(a,x) < r\}$
vide si $r = 0$, $a \notin$ → $B(a,r) \subset E$ et $a \in B(a,r)$ si $r > 0$

jamais → $*$ La boule fermée de centre a et de rayon r est l'ensemble : $B'(a,r) = \{x \in E \, , \, d(a,x) \leq r\}$
vide car $a \in B'(a,r)$ tjs

$a \in B(a,r)$ $\forall r \geq 0$, $B(a,r) \subseteq B'(a,r)$

Exemple : * Sur $(\mathbb{R}^2, \| \|_\infty)$, si $a = (1,2)$ et $r = 1$
alors $B(a,r)$



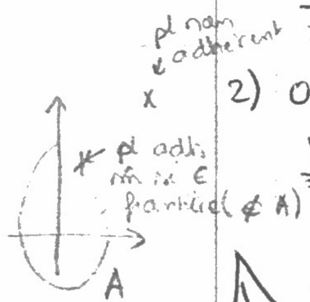
$B(a,r) = \{(x,y) \ ; \ |x-1| < 1 \text{ et } |y-2| < 1\}$
$B'(a,r)$ est l'ensemble précédent + contour

* $B(a,r)$ dans $(\mathbb{R}^2, \| \|_1) = ?$
$B(a,r)$ dans $(\mathbb{R}^2, \| \|_2) = ?$

Définition : Soit (E,d) un espace métrique, $A \subseteq E$.
Soit $x \in E$.

1) On dit que x est un point intérieur à A ssi
$\exists \varepsilon > 0$ t.q. $B(x, \varepsilon) \subset A$

2) On dit que a est un point adhérent à A ssi
$\forall \varepsilon > 0 \quad B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$

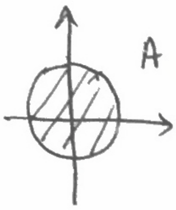


⚠ * Si x est intérieur à A, alors $x \in A$.
* x peut-être adhérent à A, sans appartenir à A
* Tout élément de A est adhérent à A
* x peut-être dans A, sans être intérieur à A.

Notation : A comme avant. L'ensemble des points intérieurs à A est noté par $\mathring{A}$. L'ensemble des points adhérents à A est noté par $\bar{A}$.

On a : $\mathring{A} \subseteq A \subseteq \bar{A}$

<u>Exemples :</u>



1) Dans $(\mathbb{R}^2, \| \|_2)$, $A = \{(x,y) \; x^2+y^2 \leq 1\}$
$\mathring{A} = \{(x,y) \,;\, x^2+y^2 < 1\}$
$\bar{A} = A$

2) Dans $(\mathbb{R}^2, \| \|_2)$, si $B = \{(x,y) \,;\, x^2+y^2<1\}$
$\mathring{B} = B$
$\bar{B} = A$

3) A, B comme avant, mais $\mathbb{R}^2$ est considéré avec $\| \|_\infty$ ($\| \|_1$ respectivement)

Mêmes réponses qu'avant ($\mathring{A} = \{(x,y) : x^2+y^2<1\}$
$\bar{A} = A$
$\bar{B} = A$, $\mathring{B} = B$)

car les normes $\| \|_\infty$, $\| \|_2$ et $\| \|_1$ sont équivalentes sur $\mathbb{R}^2$.

4) Dans $\mathbb{R}$, si $A = [0;1[$ $\quad \mathring{A} =]0;1[$
$\bar{A} = [0;1]$

⚠ Si E est un EVN et N_1 et N_2 deux normes sur E, $N_1 \sim N_2$ alors $\forall A \subseteq E$, l'adhérence de A pour la norme N_1 est égale à l'adhérence de A pour la norme N_2 et l'intérieur de A pour N_1 est égal à l'intérieur de A pour N_2.

Définition: Soit (E,d) un espace métrique et $A \subseteq E$.

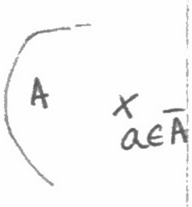
ssi $\forall x \in A$, $\exists \varepsilon > 0$ ← On dit que A est ouvert ssi $A = \mathring{A}$.

$B(x,\varepsilon) \subseteq A$ | On dit que A est fermé ssi $\bar{A} = A$ (c.à.d. $\forall x \in E$
$[\forall \varepsilon > 0,\ B(x,\varepsilon) \cap A = \emptyset] \Rightarrow x \in A$)

⚠ 1) A est ouvert dans E ssi $E \setminus A$ est fermé.
2) A est fermé ssi $E \setminus A$ est ouvert

Question: Donner un sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ qui n'est ni ouvert ni fermé.

⚠ 1) Soit $a \in \bar{A}$ $(A \subseteq (E,d))$ alors il existe une suite d'éléments de A, qui converge vers a



2) La réciproque est aussi vraie : Si $a \in E$ et $\exists (a_n)_n$ $a_n \in A$, $\lim a_n = a$, alors $a \in \bar{A}$

Preuves: 1) Soit $a \in \bar{A}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on sait que $B(a, \frac{1}{n}) \cap A \neq \emptyset$

Soit $a_n \in B(a, \frac{1}{n}) \cap A$. Donc $\forall n$, $a_n \in A$ et $d(a, a_n) < \frac{1}{n}$.

$\lim_{n \to +\infty} d(a, a_n) = 0$, donc $(a_n)_n$ est une suite d'éléments de A qui tend vers a

2) exercice

⚠ (E,d), A comme avant

1) Pour montrer que A n'est pas fermé, il suffit de trouver un élément de $\bar{A} \setminus A$ (déf) par la remarque précédente, il suffit de trouver

une suite $(a_n)_n$ d'éléments de A, qui converge vers un point $a \notin A$.

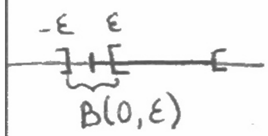
2) Pour montrer que A n'est pas ouvert, il suffit de montrer que $E \setminus A$ n'est pas fermé, d'après (1), il suffit de trouver une suite (a_n) d'éléments de $E \setminus A$, qui converge vers un élément de A.

<u>Exemple:</u> $A = [0;1[\subseteq \mathbb{R}$

→ n'est pas fermé : la suite $(1-\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite d'éléments de A qui converge vers 1 et $1 \notin A$ (Remarque)

→ n'est pas ouvert : la suite $(\frac{-1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de $\mathbb{R}\setminus A$ qui converge vers 0 et $0 \in A$

(ou : $0 \in A$ et $0 \notin \mathring{A}$ car $\forall r>0$ $B(0,r) =]-r,r[$ $\not\subset [0;1[$)



<u>Exemples:</u> * Si (E,d) est un espace métrique, alors $\emptyset$ et E sont ouverts et fermés en m̂ temps

* $\mathbb{Q} \subseteq \overset{\text{e.v.n.}}{\mathbb{R}}$ ni fermé ni ouvert de $\mathbb{R}$.

non fermé car la suite $\frac{E(\sqrt{2}\cdot 10^n)}{10^n} \in \mathbb{Q} \longrightarrow \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

non ouvert : $0 \notin \mathring{\mathbb{Q}}$: $\frac{\sqrt{2}}{n} \notin \mathbb{Q} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \in \mathbb{Q}$
$(n \in \mathbb{N})$

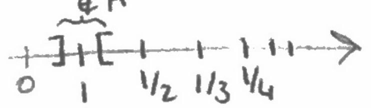
* Dans $\mathbb{R}$, l'ensemble $A = \{\frac{1}{n}, n\in\mathbb{N}^*\}$ $(=\{1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \dots\})$

→ non ouvert car $B(1,\varepsilon) =]1-\varepsilon, 1+\varepsilon[\not\subset A$

→ non fermé : La suite $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite d'éléments de A qui converge vers $0 \notin A$

$\mathring{A} = \emptyset$

$\bar{A} = A \cup \{0\}$ en particulier $A\cup\{0\}$ est fermé



* $E = (\mathcal{C}([0;1], \mathbb{R}), \| \ \|_1)$

$\forall n \quad f_n : x \longrightarrow x^n$ et $A = \{ f_n ; n \in \mathbb{N} \}$

$\rightarrow$ n'est pas fermé car la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de A mais elle converge vers la fonction nulle dans $(\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}), \| \ \|_1)$ or la la fonction nulle n'est pas dans A.

$\mathring{A} = \emptyset \qquad \bar{A} = A \cup \{\text{fonction nulle}\}$

<u>Proposition:</u> Toute réunion (finie ou infinie) d'ouverts est un ouvert. Toute intersection finie d'ouverts est un ouvert.

Toute intersection (finie ou infinie) de fermés est un fermé. Toute réunion finie de fermés est un fermé.

<u>Exemples:</u> 1) Un ensemble (infini) d'ouverts $(O_n)_n$; $\bigcap\limits_n O_n$ n'est pas ouvert dans $\mathbb{R}$:

$O_n =]-\frac{1}{n} ; \frac{1}{n}[$ est un ouvert

$\bigcap\limits_n O_n = \{0\}$ n'est pas ouvert

2) Un ensemble (infini) de fermés $(F_n)_n$ t.q. $\cup F_n$ n'est pas fermé.

<u>Proposition:</u> Soit (E,d) un espace métrique quelconque alors :

1) Toute boule ouverte de (E,d) est un ensemble ouvert

2) Toute boule fermée de (E,d) est un ensemble fermé.

<u>Preuve</u>: 1) Soit $a \in E$, $r > 0$. Montrons que $B(a,r)$ est un ouvert

$*$ Soit $b \in B(a,r)$. Montrons qu'il existe $\varepsilon > 0$ t.q. $B(b,\varepsilon) \subseteq B(a,r)$

Posons $\varepsilon = r - d(a,b)$

$\varepsilon > 0$ car $b \in B(a,r)$.

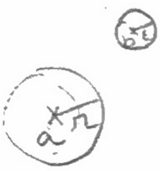
Montrons que $B(b,\varepsilon) \subseteq B(a,r)$

Soit $x \in B(b,\varepsilon)$.

Montrons que $x \in B(a,r)$ c.à.d. $d(a,x) < r$

$$d(a,x) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{inégalité} \\ \text{triangulaire}}}{\leq} d(a,b) + d(b,x) < d(a,b) + (r - d(a,b)) = r$$

d'où le résultat



2) exercice On montre que $E \setminus B'(a,r)$ est un ouvert, soit $b \in E \setminus B'(a,r)$

On cherche $\varepsilon > 0$ t.q. $B(b,\varepsilon) \cap B'(a,r) = \emptyset$

(On prend $\varepsilon \leq d(a,b) - r$)

⚠ l'image réciproque d'un ouvert par une application continue est un ouvert.

<u>Théorème</u>: Soient (E,d) et (E',d') 2 espaces métriques et $f : (E,d) \to (E',d')$ une fonction. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1) f est continue

2) L'image réciproque par f d'un fermé de E' est un fermé de E.

3) L'image réciproque par f d'un ouvert de E' est un ouvert de E.

Démonstration :

1) $\Rightarrow$ 3)

Supposons f continue et soit $O' \subset E'$ ouvert

Soit $O = f^{-1}(O')$ $\left(= \{ x \in E,\ f(x) \in O' \} \right)$

Montrons que O est un ouvert de E.

Soit $x \in O$. Montrons qu'il existe $r > 0$ t.q.

$B(x, r) \subseteq O$.

$x \in O \Rightarrow f(x) \in O'$ or O' est un ouvert donc $\exists\, \varepsilon > 0$.

$B(f(x), \varepsilon) \subseteq O'$

$\exists\, \varepsilon > 0$ t.q. $\forall y \in E'$ si $d(f(x), y) < \varepsilon$ alors $y \in O'$.

or f est continue alors $\exists\, r > 0$ t.q. :

$\forall z \in E$ si $d(x, z) < r$ alors $d'(f(x), f(z)) < \varepsilon$

$\forall z$: si $z \in B(x, r)$ alors $f(z) \in B(f(x), \varepsilon)$

d'où $f(B(x, r)) \subseteq B(f(x), \varepsilon) \subseteq O'$

choix de ε

d'où $B(x, r) \subseteq f^{-1}(O') = O$

On a montré que $\forall x \in O\ \exists\, r > 0$ t.q. $B(x, r) \subseteq O$

d'où O est ouvert.

3) $\Rightarrow$ 1)

Supposons que $\forall O' \subseteq E'$ ouvert $f^{-1}(O')$ est ouvert

Montrons que f est continue.

Soit $x \in E$. Montrons que $\forall \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0$ t.q. $\forall z$:

Si $d(x,z) < \delta$ alors $d(f(x), f(z)) < \varepsilon$
(c.à.d. $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ t.q. $f(B(x,\delta)) \subseteq B(f(x),\varepsilon)$)

$z \in B(x,\delta)$
$f(z) \in f(B(x,\delta))$
et
$f(z) \in B(f(x),\delta)$

Soit $\varepsilon > 0$ $B(f(x),\varepsilon)$ est un ouvert de E', donc
$f^{-1}(B(f(x),\varepsilon))$ est un ouvert de E (hypothèse)
or $x \in f^{-1}(B(f(x),\varepsilon))$ qui est ouvert d'où
$\exists \delta > 0$ t.q. $B(x,\delta) \subseteq f^{-1}(B(f(x),\varepsilon))$
d'où $f(B(x,\delta)) \subseteq B(f(x),\varepsilon)$ C.Q.F.D.

$2 \Rightarrow 3$ et $3 \Rightarrow 2$ sont faciles car:
Si on sait que l'image réciproque d'un ouvert est ouvert, alors on sait par passage au complémentaire que l'image réciproque du complémentaire de chaque ouvert de E' est le complémentaire d'un ouvert de E.
$(C_E(f^{-1}(A)) = f^{-1}(C_E(A))$. D'où l'image d'un fermé est un fermé. Pareil pour la réciproque

<u>Définition:</u>

Soient (E,d) et (E',d') 2 espaces métriques.
$f : (E,d) \to (E',d')$ une application et $K > 0$.
On dit que f est K-lipschitzienne ssi
$$\forall x,y \in E, \ x \neq y \qquad d'(f(x), f(y)) < K\, d(x,y)$$

<u>Exemples:</u> 1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to x^2$ n'est pas lipschitzienne $\forall K > 0$ car
$d(f(x), f(x+1))$ n'est pas bornée sur $\mathbb{R}$
alors $d(x, x+1) = 1$ bornée sur $\mathbb{R}$.

2) $x \to \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$ n'est pas lipschitzienne.

3) $id_{\mathbb{R}}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \to x$
$\sin x \to \sin x$
$x \to ax+b$ $(a,b$ fixés$)$
$\Big\}$ sont K-lipschitziennes

4) $x \to \sin(x^2)$ n'est pas K-lipschitzienne $\forall K>0$
(montrer que $\exists$ 2 suites $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ de $\mathbb{R}$ t.q. : $d(x_n,y_n) \xrightarrow{n\to+\infty} 0$ alors $\forall n$ $d(f(x_n),f(y_n))>1$

5) Soit $f: [1;+\infty[\to \mathbb{R}$
$x \to \ln(x)$
Alors f est 1-lipschitzienne.
t.q. $\forall x<y \in [1;+\infty[$
Montrons que $\exists K>0$ $\overbrace{\ln(y)-\ln(x)}^{(d(f(x),f(y)))} < K\overbrace{(y-x)}^{d(x,y)}$

Il faut trouver $K>0$ t.q. $\forall x<y \in [1;+\infty[$
$$\frac{\ln(y)-\ln(x)}{y-x} < K$$
Soient $x<y$ alors $\exists c \in]x,y[$ t.q.
$$\frac{\ln(y)-\ln(x)}{y-x} = (\ln)'c = \frac{1}{c} \text{ (accroissement finis)}$$
or $1 \leq x < c$ d'où $\frac{1}{c} > 1$
d'où $\forall x<y \in [1;+\infty[$, $\frac{\ln(y)-\ln(x)}{y-x} < 1$
ln est donc 1-lipschitzienne sur $[1;+\infty[$

$\triangle$ 1- Si $f: [a;b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fct° dérivable et telle que $|f'|$ est majorée sur $[a;b]$ par r strictement alors f est r-lipschitzienne sur

$[a;b]$ (théorème des accroissements finis)

2- Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dérivable et M-lipschitzienne alors f' est bornée par M car $\forall x \neq y$ $\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|} < M$. On fixe x, on fait tendre y vers x, on a que : $|f'(x)| = \lim_{y \to x} \left| \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \right| < M$

3- Une fonction K-lipschitzienne est uniformément continue.

Soit $f : (E,d) \to (E',d')$ $\varepsilon > 0$

Il faut trouver δ t.q. $\forall x,y \in E$, si $d(x,y) < \delta$ alors $d'(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

On sait que $d'(f(x), f(y)) < K\, d(x,y)$

On choisit $\delta = \frac{\varepsilon}{K}$. Si $d(x,y) < \delta = \frac{\varepsilon}{K}$ alors $K . d(x,y) < K . \frac{\varepsilon}{K} = \varepsilon$

d'où $d'(f(x), f(y)) < \varepsilon$ C.Q.F.D.

⚠ La réciproque n'est pas vraie :

l'application $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$

$x \to \sqrt{x}$

est uniformément continue mais non lipschitzienne (pour aucun $K > 0$)

<u>Rappel :</u> (E,d) est dit complet ssi toute suite de Cauchy dans E converge vers un élt de E.

c.à.d. $\forall (x_n)_n \in E^{\mathbb{N}}$: $[\forall \varepsilon > 0, \exists M > 0, \forall p,q > M, d(x_p, x_q) < \varepsilon] \overset{\text{alors}}{\Rightarrow} [\exists a \in E, \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 > 0$ $\forall n \geq n_0, d(x_n, a) < \varepsilon]$

si x_n est une suite de Cauchy

(x_n) converge.

(pt fixe de Banach)

<u>Théorème :</u> Soit (E, d) un espace complet, $f : E \to E$ une fonction K-lipschitzienne pour un certain $K < 1$. Alors f admet un point fixe (c.à.d. $\exists x \in E,\ f(x) = x$)

<u>Preuve :</u> Soit $a \in E$, quelconque. Considérons la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = \underbrace{f(f(f \dots (a))}_{n \text{ fois}} \quad \text{et } a_0 = a$$

C'est donc la suite $(a, f(a), f\circ f(a), f\circ f\circ f(a), f\circ f\circ f\circ f(a), \dots)$. On a : $\underbrace{a_{n+1}}_{\ell} = \underbrace{f(\underbrace{a_n}_{\ell})}_{f(\ell)}$

Montrons que $(a_n)_n$ est une suite de Cauchy.

$d(a_1, a_2) = d(f(a_0), f(a_1)) < K\, d(a_0, a_1)$

$d(a_2, a_3) = d(f(a_1), f(a_2)) < K\, d(a_1, a_2) \leq K^2 d(a_0, a_1)$

$d(a_3, a_4) = d(f(a_2), f(a_3)) < K(d(a_2, a_3))$

$< K^3\, d(a_0, a_1)$

def de $(a_n)_n$

f est K-lipschitzienne

$< K^2 d(a_0, a_1)$ d'après cas précédent

Par récurrence, on montre que $\forall n$,

$d(a_n, a_{n+1}) < K^n d(a_0, a_1)$

Soient $p \leq q$, $(p, q) \in \mathbb{N}^2$

$d(a_p, a_q) \leq d(a_p, a_{p+1}) + d(a_{p+1}, a_{p+2}) + d(a_{p+2}, a_{p+3}) + \dots d(a_{q-1}, a_q)$

inégalité triangulaire

$\leq K^p . d(a_0, a_1) + K^{p+1} d(a_0, a_1) + \dots + K^{q-1} d(a_0, a_1)$

$\leq K^p d(a_0, a_1) (\underbrace{1 + K + K^2 + K^3 + \dots + K^{q-p-1}}_{\leq \frac{1}{1-K}})$

(car somme des termes d'une suite géométrique de raison $K \in [0; 1[$)

$\leq K^p \underbrace{\left(\frac{d(a_0, a_1)}{1-K}\right)}_{\text{cte en } p,q}$

Comme $K<1$, alors $K^p \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $d(a_p, a_q) \underset{p,q\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

C'est donc une suite de Cauchy.

Or E est complet, la suite admet donc une limite ℓ. $a_{n+1} = f(a_n)$ d'où $\lim_{n\to+\infty} a_{n+1}$ $= \lim_{n\to+\infty} f(a_n) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{car } f \text{ est} \\ \text{continue}}}{=} f(\lim_{n\to+\infty} a_n)$

(Toute fct° lipschitzienne est uniformément c° donc c°)

d'où : $\ell = f(\ell)$; ℓ est le pt fixe cherché.

⚠ Soient (E,d), K et f comme dans le théorème précédent, alors le point fixe de f est unique.

Supposons pour une contradiction qu'il existe 2 points fixes ℓ_1, ℓ_2 $(\ell_1 \neq \ell_2)$.

$f(\ell_1) = \ell_1$ et $f(\ell_2) = \ell_2$

$d(f(\ell_2), f(\ell_1)) \underset{\substack{\uparrow \\ f \text{ est K-lipschitzienne}}}{\leq} K\, d(\ell_2, \ell_1) \underset{\substack{\uparrow \\ K<1}}{<} d(\ell_2, \ell_1)$

Contradiction

<u>Définition</u>: Soit (E,d) un espace métrique et $A \subseteq E$.
On dit que A est une partie compacte de E ssi toute suite $(x_n)_n$ d'éléments de A admet une sous-suite qui converge vers un élt x de A $(x \in A)$

<u>Exemples</u>: 1) $]0;+\infty[\in \mathbb{R}$ n'est pas compacte car la

suite définie par $x_n = n$ n'admet pas de sous-suite convergente.

2) $]0;1] \subseteq \mathbb{R}$ n'est pas compact car la suite $x_n = \frac{1}{n}$
$(x_n)_n \longrightarrow 0 \notin]0;1]$ donc toute sous-suite de $(x_n)_n$ tend vers $0 \notin]0;1]$. Aucune sous-suite ne converge vers un élt de $]0;1]$.

3) Si (E,d) un espace métrique, $A \subseteq E$ une partie non fermée, alors A n'est pas compacte, exactement comme dans la preuve 2.
Soit $a \in \bar{A} \setminus A$ (possible car A non fermée) et $(a_n)_n$ une suite d'éléments de A qui tend vers a alors toute sous-suite de $(a_n)_n$ tend vers $a \notin A$.

4) $[0;1] \subseteq \mathbb{R}$? $\left.\begin{array}{l} \\ \end{array}\right\}$ Compacte ?
$[0,1] \times [0,1] \subseteq \mathbb{R}^2$?

<u>Proposition:</u> Soit (E,d) un espace métrique compact $(A = E)$. Alors (E,d) est complet.

<u>Preuve:</u> Soit $(x_n)_n$, une suite de Cauchy.
Comme E est compact, cette suite admet une sous-suite qui converge vers un élt $a \in E$.
Or $(x_n)_n$ est de Cauchy, qui admet une sous suite convergente, la suite est donc elle même convergente C.Q.F.D.

$[0,1]$ compact ?
$[-1,5]$ compact ?

⚠ Soit I une partie fermée bornée de $\mathbb{R}$.
Alors I est compacte. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite

de I. On sait que (x_n) admet une sous-suite $(x_{q(n)})_n$ monotone. Cette sous-suite est aussi bornée. D'où $(x_{q(n)})_n$ converge vers un é'lt $a \in \mathbb{R}$
$a \in \bar{I}$ (car limite d'une suite d'élts de I).
Or $I = \bar{I}$, alors $a \in I$. Donc, I compact.

Théorèmes: 1) les sous-ensembles compacts de $\mathbb{R}$ sont les sous-ensembles fermés bornés.
2) Les sous-ensembles compacts de $\mathbb{R}^n$ sont les sous-ensembles fermés bornés.
3) Les parties compactes de $\mathbb{C}^n$ sont les parties fermées bornées.

Théorème: Soient (E,d), (E',d') 2 espaces métiques (E,d) compact.
Soit $f : E \to E'$.
Alors f est continue ssi f est uniformément c^0.

1er sens: uniformément $c^0 \Rightarrow c^0$ (tjs vrai d.d)

2ème sens: $c^0 \Rightarrow$ unif. c^0

Par l'absurde, supposons que f est c^0 et f non unif. c^0.
Alors $\exists \varepsilon > 0$, fixé, t.q. $\forall n$ $\exists x_n, y_n \in E$ avec $d(x_n, y_n) < \frac{1}{n}$ alors que $d'(f(x_n), f(y_n)) > \varepsilon$
Comme E est compact on peut quitte à extraire des sous-suites de $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$. Supposer que $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ sont convergents (ex)

$d(x_n, y_n) < \frac{1}{n}$, $d(\lim_n x_n, \lim_n y_n)$

$= \lim_{n \to +\infty} d(x_n, y_n) \leq \lim \frac{1}{n} = 0$

d'où $\lim x_n = \lim y_n = a \in E$

$x_n \to a$ et f c^0 donc $f(x_n) \to f(a)$
$y_n \to a$ et f c^0 donc $f(y_n) \to f(a)$
d'après l'inégalité triangulaire, $d'(f(x_n), f(y_n)) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

or $d'(f(x_n), f(y_n)) > \varepsilon > 0$ (fixé) Contradiction.

<u>Application:</u> l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to \sqrt{x}$

est uniformément continue.
Sur $[1; +\infty[$, f est uniformément c^0 (déjà montré qu'elle est 1-lipschitzienne donc unif. c^0)
Sur $[0; 2]$, f est c^0 sur un compact donc unif. c^0.
D'où f est unif. c^0 sur $[0; +\infty[$ (ex).

<u>Rappel:</u> Soient E, E' deux espaces vectoriels.
$f : E \to E'$ est dite linéaire ssi
$\forall\, x, y \in E$, $f(x, y) = f(x) + f(y)$

$\forall\, x \in E$, $\forall\, \lambda \in K$, $f(\lambda x) = \lambda f(x)$

<u>Questions:</u> 1) Si on considère

$$D : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$$
$$P \to D(P) = P' \leftarrow \text{dérivée}$$

est-elle continue si $\mathbb{R}[X]$ est munie de la norme :

$(a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0) = |a_n| + |a_{n-1}| + |a_{n-2}| + \dots + |a_0|$?

2) Si $E = C([0,1], \mathbb{R})$ et N une norme quelconque sur E. Soit $D : E \to E$
$f \to f'$

D peut-elle être continue pour un choix adéquat de N ?

<u>Théorème</u> : Soient (E, N) et (E', N') 2 e.v.n.
$f : E \to E'$ une application linéaire.
Alors les conditᵒ suivantes sont équivalentes :

1) f est lipschitzienne
2) f est uniformément continue
3) f est continue
4) f est continue en 0
5) $\exists c > 0$ t.q. $\forall x$, $N'(f(x)) \leq c . N(x)$
6) f est bornée sur un ouvert contenant 0

$1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 4$: évident

$\boxed{4 \Rightarrow 5}$: Supposons que f est c° en 0.
Pour $\varepsilon = 1$, $\exists \delta > 0$ t.q. $\forall x$, si $N(x - 0) < \delta$ alors $N'(f(x) - \underbrace{f(0)}_{0 \text{ car linéaire}}) < 1$.

$\forall x$, Si $N(x) < \delta$ alors $N'(f(x)) < 1$

Soit $x \in E$ quelconque alors $\frac{\delta}{2N(x)} . x \in B(0, \delta) \subseteq E$

D'où $N'\left(f\left(\frac{\delta}{2N(x)} . x\right)\right) < 1$

Or, f est linéaire $\Rightarrow N'\left(f\left(\frac{\delta}{2N(x)} . x\right)\right) = \frac{\delta}{2N(x)} . N'(f(x))$

d'où $\forall x \in E$, $\frac{\delta}{2N(x)} \cdot N'(f(x)) < 1$

d'où $N'(f(x)) < \underbrace{\frac{2}{\delta}}_{C} \cdot N(x)$ c.q.f.d.

<u>5 ⇒ 6</u>: On a : $c>0$ t.q. $\forall x$, $N'(f(x)) < cN(x)$.
On considère l'ouvert $B(0,1) \subseteq E$. C'est un ouvert contenant 0 et sur cet ouvert f est bornée par C car $\forall y \in B(0,1)$, on a : $N(y) \leq 1$ et $N'(f(y)) < c.\underbrace{N(y)}_{\leq 1}$
$\Rightarrow \leq C$ C.Q.F.D.

<u>6 ⇒ 1</u>: Soit $\mathcal{O}$ un ouvert contenant 0 t.q. f est bornée sur $\mathcal{O}$ par une cte K. Montrons que f est lipschitzienne. $\mathcal{O}$ est ouvert et $0 \in \mathcal{O}$. Soit alors $r>0$ t.q. $B(0,r) \subseteq \mathcal{O}$ comme $B(0,r) \subseteq \mathcal{O}$ alors
$\forall x \in B(0,r)$, $N'(f(x)) \leq x$.
Il faut trouver $K'>0$ t.q. $\forall x \neq y$, $N'(f(x)-f(y)) < K' N(x-y)$.
Soient x, y quelconques :
alors $\frac{r}{2} \cdot \frac{x-y}{N(x-y)} \in B(0,r)$

D'où $N'\left(f\left(\underbrace{\frac{r}{2} \cdot \frac{x-y}{N(x-y)}}_{\text{cte}>0}\right)\right) \leq K$

D'où, $\frac{r}{2} \cdot \frac{1}{N(x-y)} \cdot N'(f(x-y)) \leq K$

$\Rightarrow N'(f(x)-f(y)) \leq \frac{2K}{r} \cdot N(x-y)$

$\forall x, y$
D'où, f est $\frac{4K}{r}$ - lipschitzienne.