## Chapitres 1: Fonctions usuelles.

### 1-1 Vocabulaire sur les fonctions.

-C'est une application définit sur un domaine D ⊂ R vers R.

$$f: D \subset R \to R$$
$$x \to y = f(x)$$

$y$ : Image d'un antécédent $x$ par $f$. D: Domaine de définition.

**Fonctions :** -Affine : $x \to nx + p$

-Polynomiale : $x \to P(x) = a_0 + a_1x + a_2x + \cdots a_nx^n$

-Rationnelle : tout quotient d'une fonction polynomiale par une fonction polynomiale non nulle.

**Bijections :** $f$ est bijective, elle possède une réciproque $f^{-1}: B \to A$ $par\ y = f(x) \leftrightarrow x = f^{-1}(y)$

$f: I \to J$ Une fonction bijective ($I, J$ sont deux intervalles de $R$)

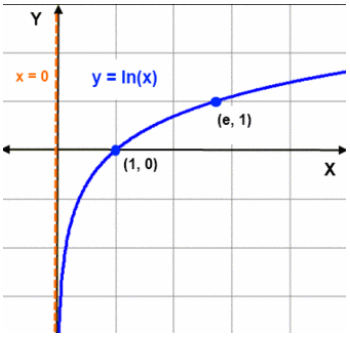
-Si $f$ strictement monotone $\to f^{-1}$ strictement monotone de même sens.

-Si $f$ continue sur $I \to f^{-1}$ continue sur $J$

-Si $f$ derivable et $f^{-1}$ ne s'annule pas sur $I$ alors $f^{-1}$ est dérivable : $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$

### 1-2 Fonctions log et exp.

**Log :** -l'unique primitive sur $R^{+*}$ de $\frac{1}{x}$ qui s'annule en 1.




-**propriétés fondamentales**: $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$

$$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$$
$$\ln(x^n) = n.\ln(x)$$

-$ln$: $]0\,;+\infty[ \to R$ / $x \to \ln(x)$

est bijective car elle est continue et strictement croissante.

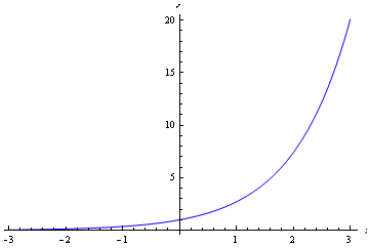
-$\lim_{+\infty} \ln(x) = +\infty$ $et$ $\lim_{0^+} \ln(x) = -\infty$

-$\lim_{+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ $et$ $\lim_{0^+} x.\ln(x) = 0$

-$\ln(e) = 1$

**exp:** -fonction réciproque de $y = \ln(x)$

-$exp: R \to ]0\,;+\infty[$ / $x \to x = \ln(y)$ avec $y = \exp(x) \leftrightarrow x = \ln(y)$




- **propriétés fondamentale**: $\exp(x + y) = \exp(x)\exp(y)$

$$\exp(x - y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)}$$
$$\exp(nx) = \exp(x)^n$$
$$(\exp(x))' = \exp(x)$$
$$(\exp(u(x)))' = u'(x)\exp(u(x))$$

-$\lim_{-\infty} \exp(x) = 0$ $et$ $\lim_{+\infty} \exp(x) = +\infty$

-$\lim_{+\infty} \frac{\exp(x)}{x} = +\infty$

**Log et exp de base quelconque :**

**Log**

**-Si $a > 0$ et $a \neq 1$ ($ln(a) = 0$)**

- $\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$ / $\log_a(a) = 1$ / $\log_e(x) = \ln(x)$

- $\log_a : ]0\,;+\infty[ \to R$

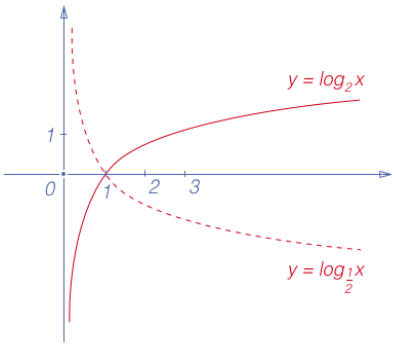
$x \to y = \log_a(x)$ est une bijection.

-$(\log_a(x))' = \frac{1}{x.ln(a)}$

-$(\log_a(u))' = \frac{u'}{u.ln(a)}$

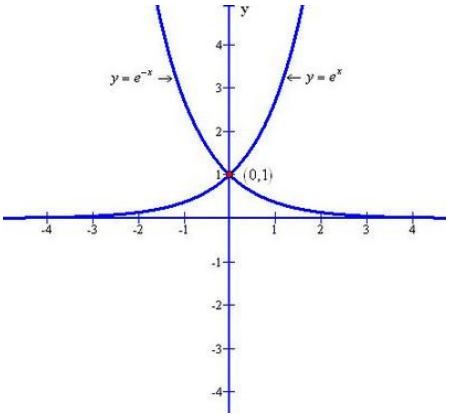
MOUVEMENT DE L'ESIB SOLIDAIRE

**-Si $\boldsymbol{a} > 1$**
-$\log_a(x)$ est strictement croissant.
-$\lim_0 \log_a(x) = -\infty \quad et \quad \lim_{+\infty} \log_a(x) = +\infty$




**-Si $0 < a < 1$ ($\boldsymbol{ln(a)} < 0$)**
-$\log_a(x)$ est strictement décroissant.
-$\lim_0 \log_a(x) = +\infty \quad et \quad \lim_{+\infty} \log_a(x) = -\infty$
-$\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$
-$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$

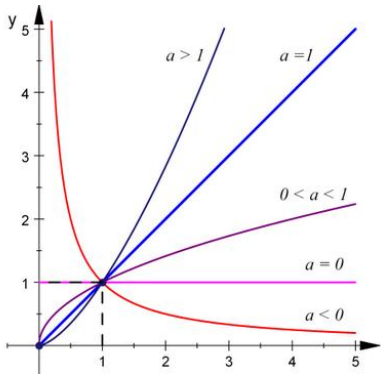
**<u>exp</u>**
**-Si $\boldsymbol{a} > 0$ , $a \neq 1$**
- $y = \exp_a(x) \leftrightarrow x = \log_a(y)$
-$\exp_a(0) = 1$
-$\exp_a(1) = a$
-$\exp_a : R \to ]0\,;+\infty[ \;/\; x \to \exp_a(x)$ est une bijection.




**-Si a>1**
-$\exp_a(x)$ est strictement croissant.
-$\lim_{-\infty} \exp_a(x) = 0$
-$\lim_{+\infty} \exp_a(x) = +\infty$

**-Si $0 < a < 1$**
-$\exp_a(x)$ est strictement décroissante.
-$\lim_{-\infty} \exp_a(x) = +\infty \quad et \quad \lim_{+\infty} \exp_a(x) = 0$
- $y = \exp_a(x) \leftrightarrow x = \log_a(y) = \frac{\ln(y)}{\ln(a)}$ , $a \neq 1 \leftrightarrow \ln(y) = x.\ln_a(a) \leftrightarrow y = \exp(x.ln(a))$
donc $\boldsymbol{\exp_a(x) = \exp(x.ln(a))}$
-$(\exp_a(x))' = \ln(a) \times \exp_a(x)$
-$\exp_a(x+y) = \exp_a(x)\exp_a(y)$
-$\exp_a(nx) = \exp_a(x)^n$
-$a^x = \exp(x.ln(a))$ , $\forall a > 0$ car $1^x = \exp(x.ln(1)) = 1$

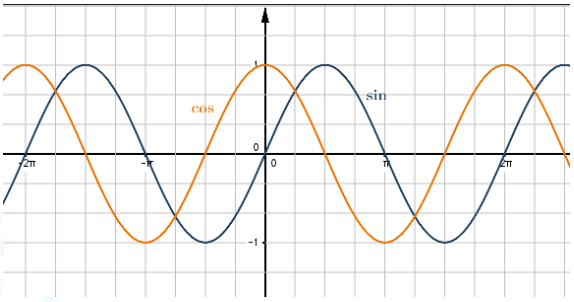
**<u>1-3 Fonction Puissance.</u>**
$\forall a \in R$ , $\varphi_a : R^{+*} \to R^{+*} \;/\; x \to x^a = \exp(a.ln(x))$
-Si$a \in N$, la fonction $x \to x^a$ est définie **sans** forme exponentielle.
- $\forall a, b \in R$ , $\forall x, y > 0$ : -$x^a y^a = (xy)^a$
-$x^a x^b = x^{a+b}$
-$(x^a)^b = x^{ab}$
-$1^a = 1 \;\; et \;\; x^0 = 1 \;\; et \;\; \ln(x^a) = a.\ln(x)$




- $\forall a \in R$ , $\varphi(x) = x^a$ est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et $\varphi_a'(x) = a.x^{a-1} = a.\exp\big((a-1)\,ln(x)\big)$
-Lorsque $a > 0$ , $\lim_0 \varphi_a(x) = 0$ et on prolonge par continuite avec $\varphi_a(0) = 0$
**-$\boldsymbol{\varphi_a'(x) = a.x^{a-1} = a.\exp\big((a-1)\,ln(x)\big)}$ :**
-Si $a > 1 \to \varphi_a$ est dérivable en 0 et $\varphi_a'(0) = 0$
-Si $0 < a < 1 \to \varphi_a$ non dérivable en 0 mais il existe une tangente vertical a l'origine.
-Si $a = 1 \to \varphi_1'(x) = a = 1$

**<u>1-4 Fonctions circulaires et réciproque.</u>**
**<u>Fonction circulaires.</u>**
-$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ définie sur $R\backslash\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\,, k \in Z\right\}$
-Les fonctions sin $et$ cos sont **$2\pi$-periodique** et dérivables a valeurs dans [-1 :1]
-$\boldsymbol{(\sin u)' = u' \cos u \;\; et \;\; (\cos u)' = -u' \sin u}$
-$(\tan u)' = u'(1 + \tan^2 u) = \frac{u'}{\cos^2 u}$

MOUVEMENT DES ESIB SOUDAIRE




-$(\cot u)' = \frac{u'}{\sin^2 u}$

-sin $et$ tan: Impaires et cos: paire

-si $\cos(x) = \cos(y)$ $sur$ $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ donc $x = y$

**Transformation affines :**

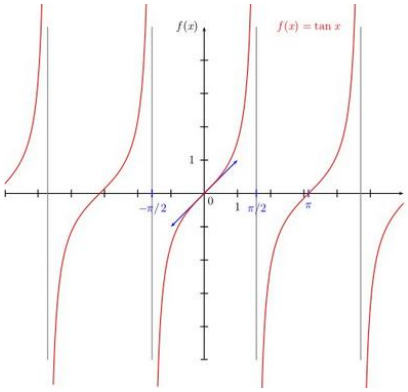
$\sin(-x) = -\sin(x)$ $\quad$ $\sin(\pi - x) = \sin(x)$

$\cos(-x) = \cos(x)$ $\quad$ $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$

$\sin(\pi + x) = -\sin(x)$ $\quad$ $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$

$\cos(\pi + x) = -\cos(x)$ $\quad$ $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin(x)$

$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos(x)$ $\quad$ $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$




**Formules d'additions :**

$\cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$

$\sin(a + b) = \cos(a)\sin(b) + \sin(a)\cos(b)$

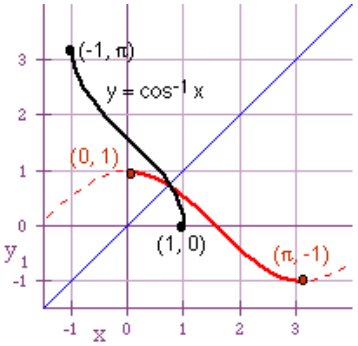
$\tan(a + b) = \frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}$ $\quad et \quad$ $\tan(a - b) = \frac{\tan(a)-\tan(b)}{1+\tan(a)\tan(b)}$

$\cos(x) - \cos(y) = -2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$

$\sin(x) - \sin(y) = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$

**Limites :**

$\lim_0 \frac{\sin(x)}{x} = 1 \quad et \quad \lim_0 \frac{(1-\cos(x))}{x^2} = \frac{1}{2}$




**<u>Réciproque des fonctions circulaires.</u>**

**<u>-Arccos.</u>**

-**cos** : strictement décroissante sur $[0 + \pi]$ , $cos'(x) = -\sin(x) < 0$ donc bijection de $[0\,;\pi]$ $sur$ $[-1\,;1]$

-Bijection réciproque : arccos : $[-1\,;1] \to [0\,;\pi]$ / $x \to y = \arccos(x)$

-$\forall x \in [-1\,;1]$ , $\cos(arccos(x)) = x$

-$\forall x \in [0\,;\pi]$ , $\arccos(\cos(x)) = x$

-$\forall x \in [-1\,;1]$ , $\sin(\arccos(x)) = \sqrt{1 - x^2}$

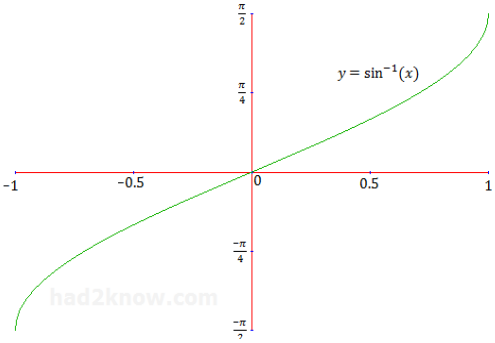
-$\forall x \in [-1\,;1]$ , $\arccos(-x) = \pi - \arccos(x)$

-$\forall x \in [\pi\,;2\pi]$ , $\arccos(\cos(x)) = 2\pi - x$

**-arccos**: continue et strictement décroissante sur $[-1\,;\ 1]$ derivable sur $]-1\,;1[$

-$(\arccos(x))' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\left(-\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}\right)$

**<u>-Arcsin.</u>**




**-sin** : $\left[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right] \to [-1\,;1]$ / $x \to \sin x$ continue et strictement croissante.

-bijective → bijection réciproque : arcsin : $[-1\,;1] \to \left[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right]$ / $x \to y =$ $\arcsin x \to \sin y = x$

-$\forall x \in [-1\,;1]$ , $\sin(\arcsin(x)) = x$

-$\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right]$ , $\arcsin(\sin(x)) = x$

-$\forall x \in [-1\,;1]$ , $\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1 - x^2}$

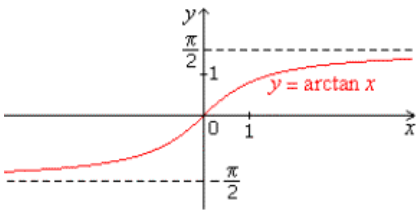
-$\forall x \in [-1\,;1]$ , $\arcsin(-x) = -\arcsin(x)$ (fonction impaire)

-$\forall x \in \left[\frac{\pi}{2}\,;\frac{3\pi}{2}\right]$ , $\arcsin(\sin(x)) = \pi - x$

-**arcsin** : continue et strictement croissante sur $[-1\,;1]$ dérivable sur $]-1\,;1[$

-$(\arcsin(x))' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\left(\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}\right)$

**<u>-Arctan.</u>**




**-tan** : $]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}[\ \to R$ est continue et strictement positive alors bijective.

-bijection réciproque : arctan $R \to ]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}[$ / $x \to y = \arctan(x)$ →

MOUVEMENT DE L'ESIB SOLIDARI

$\tan(y) = x$

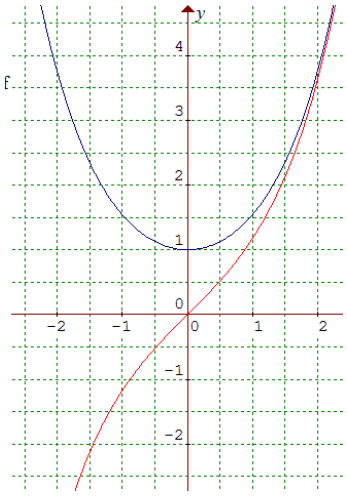
-$\forall x \in R$ , $\tan(\arctan(x)) = x$

-$\forall x \in ]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}[$ , $\arctan(\tan(x)) = x$

-$\forall x \in \mathrm{R}$ , $\arctan(-x) = -\arctan(x)$ (fonction impaire)

-**arctan** : continue et strictement positive et dérivable sur R.

-$(\arctan(x))' = \frac{1}{1+x^2}$ $\left(\frac{\boldsymbol{u'}}{\boldsymbol{1+u^2}}\right)$



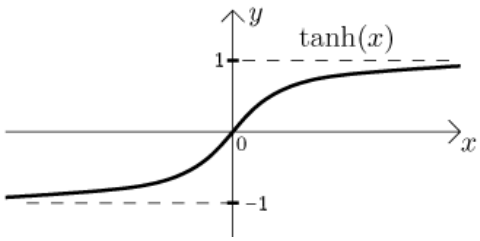

**1-5 Fonctions hyperboliques.**

**Fonction sinus hyperbolique :**

- $sh\ (x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

- $sh$ est impaire.

-$sh$ est continues et dérivables sur $R$ $(sh(u))' = u'ch(u)$




**Fonction cosinus hyperbolique :**

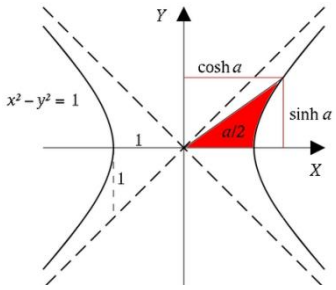
-$ch(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

-$ch$ est paire

-$ch$ est continues et dérivable sur $R$ $(ch(u))' = u'sh(u)$

***sh* et *ch*:**

-$\forall x \in R$ $ch(x) \geq 1$ ⁝⁝ $ch(x) + sh(x) = e^x$ ⁝⁝ $ch(x) - sh(x) = e^{-x}$ ⁝⁝ $ch^2(x) - sh^2(x) = 1$




**Fonctions tangente hyperbolique :**

-$th(x) = \frac{sh(x)}{ch(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$

-$th$ est impaire

-$th$ est continue et dérivable sur $R$ $(th(x))' = \frac{1}{ch^2(x)} = 1 - th^2(x)$

***sh* , *ch* et *th*:** $(\forall x, y \in R)$

-$ch(x+y) = ch(x)ch(y) + sh(x)sh(y)$

-$sh(x+y) = sh(x)ch(y) + ch(x)sh(y)$

-$th(x+y) = \frac{th(x)+th(y)}{1+(th(x)th(y)}$

-$ch(x-y) = ch(x)ch(y) - sh(x)sh(y)$

-$sh(x-y) = sh(x)ch(y) - ch(x)sh(y)$

**-Si on pose $\boldsymbol{x = ch(x)}$ et $\boldsymbol{y = sh(x)}$ alors $\boldsymbol{x^2 - y^2 = 1}$ est l'équation d'une hyperbole équilatère.**

MOUVEMENT
DE L'ESIB
SOLIDAIRE