Chapitre 2: Equations différentielles linéaires

I. Equations différentielles linéaires du 1er ordre

- $\forall(t) \in I,\ (E) : a(t)y'(t) + b(t)y(t) = c(t)$

Avec a, $b, c : I \rightarrow K$: définies continues sur I et $y : I \rightarrow K$: fonction dérivable inconnue.

$t \rightarrow y(t)$De plus on suppose que $a \neq 0$

- Equation **homogène** : $a(t)y'(t) + b(t)y(t) = 0$
- La fonction c est appeléesecond membre
- Equation différentielle**normalisée** : si a =1
- **Problème de Cauchy** : $\begin{cases} a(t)y'(t) + b(t)y(t) = c(t) \\ y(t0) = \alpha = \text{condition initiale} \end{cases}$
- Soit a : $I \rightarrow R$ continue et A une primitive de a
  Les solutions de $y'(t) + a(t)y(t) = 0$ sont toutes les fonctions $\boldsymbol{t \rightarrow \lambda e^{-A(t)} = y(t)}$, $\lambda \in \boldsymbol{R}$
- On considère $y'(t) + a(t)y(t) = b(t)$
  Alors $\boldsymbol{y(t) = y_0(t) + y_p(t)}$
  Avec $y(t)$: Solution **générale** de l'équation **non homogène.**
  $y_0(t)$: Solution **générale** de l'équation **homogène** : $\boldsymbol{y_0(t)} = \lambda e^{-A(t)}$
  $y_p(t)$: Solution **particulière** de l'équation **non homogène.**
- Deux méthodes pour trouver la solution particulière :
  1. **Méthode de la variation de la constante :**
     On détermine la solution particulière de $(E) : y'(t) + a(t)y(t) = b(t)$
     - On détermine une solution non nulle de l'équation homogène $y0(t) = c.e^{-A(t)}$
     - On cherche une solution particulière de (E) sous la forme $\Psi(t) = c(t).e^{-A(t)}$ avec c une fonction derivable
     - Le calcul de Ψ est ramenéà celui de c donc à une primitive de $b.e^A$ sur I
       $c'(t) = b(t).e^{A(t)} \quad => \quad c(t) = \int b(t).e^{A(t)}\, dt$
  2. **Méthode directe :**

b(t)	$Y_p(t)$
$a_0 + a_1t + \ldots + a_nt_n$ où $a \in K$	Si $a \neq 0, b_0 + b_1t + \ldots + b_nt^n$ Si $a = 0, y'(t) = b(t) \rightarrow y(t) = \int b(t)$ de degré $(n+1)$
$P(t)e^{mt}$, $m \in K$	$Q(t).e^{mt}$ où $Q(t)$ un polynôme de degré n si $a + m \neq 0$ $Q(t)$ un polynôme de degré $(n+1)a + m = 0$
$\sin(kx)$ ou $\cos(kx)$	$A.\sin(kx) + B.\cos(kx)$
$\alpha e^{mt}\cos(\omega t)$	On cherche y_c (solution complexe) de $y' + ay = \alpha e$ donc $Re(y_c)$ est une solution particulière
$\alpha e^{mt}\sin(\omega t)$	On cherche y_c (solution complexe) de $y' + ay = \alpha e$ donc $Im(y_c)$ est une solution particulière

II. Equation différentielle linéaire du 2nd ordre a coefficient constant

- $(\boldsymbol{H})$: $\boldsymbol{ay'' + by' + c = f(t)}$
- Equation homogène associée: $ay'' + by' + c = 0$
- Polynôme caractéristique associée (H): $ax^2 + bx + c = 0\ avec\ \Delta = b2 - 4ac$
- Si $\Delta > 0, r_1$ et r_2 $\boldsymbol{y_G(x) = c_1e^{r_1x} + c_2e^{r_2x}}$
- $\Delta = 0, r_1 = r_2$, $\boldsymbol{y_G = (c_1x + c_2)e^{rx}}$
- $\Delta < 0, \begin{cases} r_1 = \alpha - i\beta \\ r_2 = \alpha + i\beta \end{cases}$, $\boldsymbol{y_G = e^{\alpha x}[A.\cos(\beta x) + B.\sin(\beta x)]}$
- Une méthode pour trouver la solution particulière : **Méthode directe**

f(t)	$Y_{p2}(t)$ de (E)
$a_0 + a_1t + \ldots + a_nt_n$ où $a \in K$	$b_0 + b_1t + \ldots + b_nt^n$où b_ià trouver
ke^{rt} avec $ar^2 + br + c \neq 0$ (r pas une racine)	αe^{rt}
ke^{rt} avec $ar^2 + br + c = 0$	Si $\Delta > 0$, αte^{rt} ; Si $\Delta = 0$, αt^2e^{rt}
$P(x).e^{rx}$	$Q(x) = e^{rx}$, où le degré de $Q = n$ si $ar2 + br + c \neq 0$, $d_0(Q) = n + 1$ si $\Delta > 0$, $d_0(Q) = n + 2$ si $\Delta = 0$
$d.\cos(\omega x)$	$A.\cos(\omega x) + B.\sin(\omega x)$