Chapitre 3 : Dérivée

Série de Taylor:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n = f(x_0) + \frac{(x-x_0)}{1!} f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \frac{(x-x_0)^3}{3!} f^{(3)}(x_0) + \ldots$$

Dérivée première par différence première progressive :

$f'(x) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + O(h)$ Erreur : $O(h)$

Dérivée première par différence première régressive :

$f'(x) = \frac{f(x)-f(x-h)}{h} + O(h)$ Erreur : $O(h)$

Dérivée première par différence centrée :

$f'(x) = \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h} + O(h^2)$ Erreur : $O(h^2)$ (Plus précise que les derniers)

Dérivée seconde par différence centrée :

$f''(x) = \frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2} + O(h^2)$ Erreur : $O(h^2)$

Dérivé d'ordre $n^{ième}$:

$$f^{(j)}(x) = \frac{1}{h^j}[\beta_m f(x-mh) + \beta_{m-1} f(x-(m-1)h) + \ldots + \beta_1 f(x-h) + \alpha_0 f(x) + \ldots + \alpha_{n-1} f(x+(n-1)h) + \alpha_n f(x+nh)] + O(h^N)$$

Où $\beta_m, \beta_{m-1}, \ldots, \beta_1, \alpha_0, \alpha_1, \alpha_n, N$ sont à déterminer.

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x) + \frac{h^3}{6} f'''(x) + \frac{h^4}{24} f^{(4)}(\xi_1);$$

$$f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x) - \frac{h^3}{6} f'''(x) + \frac{h^4}{24} f^{(4)}(\xi_2).$$

Les étapes de la méthode seront :

1. Nous remplaçons les termes $f(x+ih)$ par leur développement de Taylor dans l'équation
2. Nous groupons ensemble les coefficients de la dérivée $i^{ème}$
3. Nous égalisons la partie droite et la partie gauche de l'équation par identification

Méthode des coefficients indéterminés :

$$f^{(j)}(x) = \beta_m f(x-mh) + \beta_{m-1} f(x-(m-1)h) + \ldots + \beta_1 f(x-h) + \alpha_0 f(x) + \ldots + \alpha_{n-1} f(x+(n-1)h) + \alpha_n f(x+nh)$$

Même étapes que la dernière.

Pour déterminer les (m+n) inconnus de cette équation nous supposons que cette formule doit être exacte quand la vraie fonction f(x) est polynomiale. Nous aurons alors (m+n) équations à (m+n) inconnues.

Dérivation numérique utilisant les différences divisées :

$P_n(x)$ Polynôme de Newton d'interpolation

$$\begin{aligned} f'(x) &= P_n'(x) + (erreur)' \\ &= [x_0, x_1] \\ &\quad + [x_0, x_1, x_2]\left[(x - x_1) + (x - x_0)\right] \\ &\quad + \ldots + [x_0, x_1, \ldots, x_n] \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1})}{(x - x_i)} \\ &\quad + (\text{erreur})' \end{aligned}$$

$$erreur' = \left[\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} (x_i - x_j) \right] \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

L'erreur est minimale au centre des points x_i utilisés.

Méthode symbolique des opérateurs pour le calcul des dérivées :

$$f_i' = \frac{1}{h}\left(\Delta f_i - \frac{1}{2}\Delta^2 f_i + \frac{1}{3}\Delta^3 f_i - \frac{1}{4}\Delta^4 f_i + \ldots\right)$$

$$f_i'' = \frac{1}{h^2}\left(\Delta^2 f_i - \Delta^3 f_i + \frac{11}{12}\Delta^4 f_i - \frac{5}{6}\Delta^5 f_i + \ldots\right)$$

$$\Delta f(x_i) = f(x_i + h) - f(x_i)$$

ou

$$\Delta f_i = f_{i+1} - f_i$$

Différences divisées :

$$[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+n}] \approx \frac{D^n f(x_i)}{n!} \approx \frac{f^{(n)}(x_i)}{n!}$$

Les x_i, y_i sont équidistants

Formules de différence centrées :

$$f_i' = \frac{1}{2h}\left((\Delta + \nabla) + \frac{1}{2}(\Delta^2 - \nabla^2) + \frac{1}{3}(\Delta^3 + \nabla^3) + \frac{1}{4}(\Delta^4 - \nabla^4) + \ldots\right) f_i$$

$$f_i' = \frac{(f_{i+1} - f_i) + (f_i - f_{i-1})}{2h} = \frac{(f_{i+1} - f_{i-1})}{2h}$$

$$\nabla f_0 = f_0 - f_{-1} \text{ et } \nabla f_i = f_i - f_{i-1}$$

Extrapolation de Richardson pour améliorer la précision des formules de dérivation numérique :

$$meilleur\ estimation = estimation\ precise + \frac{1}{2^n - 1}(estimation\ precise - estimation\ moin\ precise)$$

n est l'exposant de h qu'on veut éliminer càd l'exposant de h dans l'erreur $O(h^n)$

Quelques formules des dérivées

Dérivée première

$$f'(x_0) = \frac{f_1 - f_0}{h} + O(h)$$

$$f'(x_0) = \frac{f_1 - f_{-1}}{2h} + O(h^2)$$

$$f'(x_0) = \frac{-f_2 + 4f_1 - 3f_0}{2h} + O(h^2)$$

$$f'(x_0) = \frac{-f_2 + 8f_1 - 8f_{-1} + 3f_{-2}}{12h} + O(h^4)$$

Dérivée seconde

$$f''(x_0) = \frac{f_2 - 2f_1 + f_0}{h^2} + O(h)$$

$$f''(x_0) = \frac{f_1 - 2f_0 + f_{-1}}{h^2} + O(h^2)$$

$$f''(x_0) = \frac{-f_3 + 4f_2 - 5f_1 + 2f_0}{h^2} + O(h^2)$$

$$f''(x_0) = \frac{-f_2 + 16f_1 - 30f_0 + 16f_{-1} - f_{-2}}{12h^2} + O(h^4)$$

Dérivée d'ordre 3

$$f'''(x_0) = \frac{f_3 - 3f_2 + 3f_1 - f_0}{h^3} + O(h)$$

$$f'''(x_0) = \frac{f_2 - 2f_1 + 2f_{-1} - f_{-2}}{2h^3} + O(h^2)$$

Dérivée d'ordre 4

$$f^{(4)}(x_0) = \frac{f_4 - 4f_3 + 6f_2 - 4f_1 + f_0}{h^4} + O(h)$$

$$f^{(4)}(x_0) = \frac{f_2 - 4f_1 + 6f_0 - 4f_{-1} + f_{-2}}{h^4} + O(h^2)$$

Chapitre 4: Intégration

Règle trapézoïdale

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}(f_0 + 2f_1 + 2f_2 + \dots + 2f_{n-1} + f_n). \quad erreur\ total = -\frac{1}{12}h^3 n f''(\xi) = \frac{-(b-a)}{12}h^2 f''(\xi) = O(h^2)$$

Intégration de Romberg

$$meilleur estimation = estimation precise + \frac{1}{2^n - 1}(estimation precise - estimation moin precise)$$

Estimation Precise : Intégration par la règle trapézoïdale pour $\frac{h}{2}$

Estimation Moins Precise : Intégration par la règle trapézoïdale pour $h = \frac{b-a}{2}$

n : Exposant de h dans l'erreur (trapézoïdale donc 2)

Erreur : $O(h^4)$ la puissance augmente de 2 pour chaque nouvelle estimation

Règle 1/3 de Simpson

$$\int_{x_i}^{x_{i+2}} f(x)dx = \frac{h}{3}(f_i + 4f_{i+1} + f_{i+2})$$ Erreur Localisée : $O(-\frac{h^5}{90})$

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}(f(a) + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + 2f_4 + \dots + 4f_{n-1} + f(b))$$ Erreur Totale : $O(h^4)$

<u>**Nombre de sous intervalles est pair**</u>

Règle 3/8 de Simpson

$$\int_{x_i}^{x_{i+3}} f(x)dx = \frac{3h}{8}(f_0 + 3f_1 + 3f_2 + f_3)$$ Erreur Localisée : $O(-\frac{3}{80}h^5)$

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{3h}{8}(f(a) + 3f_1 + 3f_2 + 2f_3 + 3f_4 + 3f_5 + 2f_6 + \dots + 2f_{n-3} + 3f_{n-2} + 3f_{n-1} + f(b))$$ Erreur Totale : $O(h^4)$

<u>**Nombre de sous intervalles est impair**</u>

Méthode des coefficients indéterminés

On travail à trouver les coefficients inconnus des méthodes d'intégration :

Pour la méthode de 1/3 de Simpson :

3 inconnues a, b et c : On exige que la formule soit égale à tous les polynomes de degrés inférieurs à 2 (nb des inconnues - 1) : $1, x\ et\ x^2$

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = af(-1) + bf(0) + cf(1)$$

$$f(x) = 1 \ ; \ \int_{-1}^{1} f(x)dx = \int_{-1}^{1} dx = 2 = a(1) + b(1) + c(1) = a + b + c$$

$$f(x) = x \ ; \ \int_{-1}^{1} f(x)dx = \int_{-1}^{1} xdx = 0 = a(-1) + b(0) + c(1) = -a + c$$

$$f(x) = x^2 \ ; \ \int_{-1}^{1} f(x)dx = \int_{-1}^{1} x^2dx = \frac{2}{3} = a(1) + b(0) + c(1) = a + c$$

On trouve $a = \frac{1}{3}, b = \frac{4}{3}, c = \frac{1}{3}$ et par suite

$$\int_{-h}^{h} f(x)dx = \frac{h}{3}(f(-h) + 4f(0) + f(h)$$

Quadrature de Gauss

Comme la méthode des coefficients indéterminés

4 paramètres inconnus :

$$\int_{-1}^{1} f(t)dt = af(t_1) + bf(t_2)$$

Puisque qu'on a 4 paramètres inconnus, notre formule doit être exacte pour n'importe quel polynôme de degré plus petit ou égal à 3

$$f(t) = 1 \ ; \ \int_{-1}^{1} f(t)dt = \int_{-1}^{1} dt = 2 = a + b$$

$$f(t) = t \ ; \ \int_{-1}^{1} f(t)dt = \int_{-1}^{1} tdt = 0 = at_1 + bt_2$$

$$f(t) = t^2 \ ; \ \int_{-1}^{1} f(t)dt = \int_{-1}^{1} t^2dt = \frac{2}{3} = at_1^2 + bt$$

$$f(t) = t^3 \ ; \ \int_{-1}^{1} f(t)dt = \int_{-1}^{1} t^3dt = 0 = at_1^3 + bt_2^3$$

Nombre de termes	Valeurs de t	Coefficient pondérateur
2	-0.57735027	1.0
	0.57735027	1.0
3	-0.77459667	0.55555555
	0.0	0.88888889
	0. 77459667	0.55555555
4	-0.86113631	0.34785485
	-0.33998104	0.65214515
	0.86113631	0.65214515
	0.33998104	0.34785485
5	-0.90617975	0.23692689
	-0.53846931	0.47862867
	0.0	0.56888889
	0.90617975	0.47862867
	0.53846931	0.23692689

On obtient

Changement des bornes de l'intégrale (de a,b à -1,1) :xx`cx

$$\int_{-1}^{1} f(t)dt = f(-0.5773) + f(0.5773)$$

$$x = \frac{(b-a)t + b + a}{2} \qquad \text{donc } dx = \frac{(b-a)}{2}dt$$

Alors :

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \frac{(b-a)}{2}\int_{-1}^{1} f\left(\frac{(b-a)t + b + a}{2}\right)dt$$