Chapitres 3: Nombres réels.

1-L'ensemble des réels :

-Un rationnel est un réel de la forme $\frac{p}{q}$; $p,q \in Z \quad q \neq 0$ L'ensemble des rationnels est noté Q

-Q est stable par addition et par multiplication. (Lois de composition internes)

-Un nombre rationnel admet une écriture décimale finie ou périodique.

-Si $x \in Q$ est un irrationnel. L'ensemble est noté $R \backslash Q$.

-$R \backslash Q$ n'est pas stable par addition et par multiplication.

-Parmi les nombres réels on trouve N, Z, D , Q , $R \backslash Q$ et N^* (privés de 0)

-La relation d'ordre ($\leq$) vérifie (définie sur R) :

$\forall x \in R, \quad x \leq x \quad \rightarrow$ **réflexive**

$\forall x, y \in R, \quad x \leq y$ et $y \leq x \quad \rightarrow \quad x = y$ **(Antisymétrique)**

$\forall x, y, z \in R, \quad x \leq y , y \leq z \quad \rightarrow \quad x \leq z$ **(Transitive)**

-$\forall x, y, z \in R \qquad \boldsymbol{x \leq y \quad \rightarrow \quad x + z \leq y + z}$

-$\forall x, y \in R, \forall z \in R^* \qquad \boldsymbol{x \leq y \quad \rightarrow \quad x^2 \leq y^2}$

-$\forall x, y, z, t \in R, \qquad x \leq y \ \ et \ \ z \leq t \ \rightarrow x + z \leq y + t$

-$\forall x, y, z, t \in R^+, \qquad x \leq y \ \ et \ \ z \leq t \ \rightarrow x^2 \leq y.t$

2-Propriétés de la borne supérieure.

Majorants et minorants :

-M **majorant** de A si $\forall x \in A, \ x \leq M$

-m **minorant** de A si $\forall x \in A, \ x \geq m$

-A **majorée** si elle admet un majorant.

-A **minorée** si elle admet un minorant.

-A **bornée** si elle est majorée et minorée.

-I **non majorée** $\leftrightarrow \ \forall \boldsymbol{M} \in \boldsymbol{R}, \ \exists \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{I}, \ \boldsymbol{x} > M$

-I **non minorée** $\leftrightarrow \ \forall \boldsymbol{m} \in \boldsymbol{R}, \ \exists \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{I}, \ \boldsymbol{x} < m$

-I **bornée** $\leftrightarrow \ \exists \boldsymbol{M} \in \boldsymbol{R}, \ \forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{I}, \ \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{M}$

Borne supérieure et borne inférieure.

-$Sup(A)$: Borne supérieure de A, c'est le plus petit majorant de A.

-$Inf(A)$: Borne inférieure de A, c'est le plus grand minorant de A.

$\rightarrow Sup \ et \ Inf$: peuvent ne pas appartenir à A.

-Soit A une partie de R, $m, M \in A$

-M est le plus grand élément de A (ou maximum) si $\forall a \in A, \ \ a \leq M$

$\rightarrow Max(A)$ (doit être dans A)

-m est le plus petit élément de A (ou minimum) si $\forall a \in A, \ \ a \geq m$

$\rightarrow Min(A)$ (doit être dans A)

-Pour démontre que A est majorée : par l'absurde : $Sup(I) = 1 \ \ tel \ que \ I = [0 \, ; 1[$

$M = Sup(I)$ et supposons $M < 1 \ \rightarrow \forall x \in I , \ x \leq M$

$\rightarrow \forall M'$ majorant , $M \leq M'$

Propriété de la borne supérieure.

-Toute partie non vide et majorée/minorée de R possède une borne supérieure/inférieure.

-L'ensemble Q ne possède pas la propriété de la borne supérieure.

Caractérisation de la borne supérieure.

-Soit A une partie de R et $M \in R$ alors $M = Sup(A)$

$$\leftrightarrow \begin{cases} M \text{ est un majorant de } A \\ \forall \varepsilon > 0 \, , \ \exists x \in A \ \ ; \quad M - \varepsilon < x \leq M \end{cases}$$

Caractérisation de la borne inférieure.

$$m = Inf(A) \ \leftrightarrow \ \begin{cases} m \text{ minorant de } A \\ \forall \varepsilon > 0 \, , \ \exists x \in A \ \ ; \quad m \leq x < m - \varepsilon \end{cases}$$

MOUVEMENT DE L'ESIB SOLIDAIRE

Droite numérique achevée.

-$\overline{R} = R \cup \{-\infty\ ;\ +\infty\} \rightarrow$ $(\overline{R}\ \leq)$ est un ensemble totalement ordonné qui possède un maximum $+\infty$ et un minimum $-\infty$

-On prolonge à $\overline{R}$ les opérations de $R\ (+\ ,\times)$ (Formes indéterminés : $(+\infty) + (-\infty)$ et $0 \times \infty$

<u>3-Valeur absolue et partie entière :</u>

-Valeur absolue : $|x| = \max(-x\ ,x)$

-Distance $(x\ ,y) =\ d(x\ ,y) = |y - x|$

-On dit que a est une valeur approchée de x à ε prés si : $\boldsymbol{-d(a\ ,x) = |a - x| \leq \varepsilon}$

-On dit que a est une valeur approchée de x **par défaut** à ε prés lorsque : $a \leq x \leq a + \varepsilon$

-On dit que a est une valeur approchée de x **par excès** à ε prés lorsque : $a - \varepsilon \leq x \leq a$

-Soient $x\ ,y \in R$: -$\boldsymbol{|x| \in R^+}$

-$\boldsymbol{|x| = 0 \leftrightarrow x = 0}$

-$\boldsymbol{|x.y| = |x||y|}$

-Si $a > 0$, $|\boldsymbol{x}| < a \ \leftrightarrow\ -a < x < a$

-Si $a > 0$, $|\boldsymbol{x}| > a \ \leftrightarrow\ x > a\ \ et\ \ x < -a$

-$\boldsymbol{|x + y| \leq |x| + |y|}$ **(inégalité triangulaire)**

-$\boldsymbol{\big||x| - |y|\big| \leq |x - y|}$

Propriété d'Archimède.

-L'ensemble R est Archimédien : $\forall x > 0$, $\forall y \geq 0\ ,\exists n \in N^*$; $\boldsymbol{nx} > y$

-Cas particuliers: -Pour $x = 1$, $\forall y \geq 0, \exists n \in N^*$; $n > y$ $\rightarrow$ ***non bornée***

-Pour $y = 1$, $\forall x > 0\ ,\exists n \in N^*$; $nx > 1$ $\rightarrow$ aucun réel > 0 n'est inférieur à tous les nombres de la forme $\frac{1}{n}$, $n \in N^*$ $\rightarrow$ **tend vers 0.**

Partie entière.

-Soit $x \in R$, $\exists!$ $n \in Z$ tel que $\boldsymbol{n \leq x} < n + 1$ / On l'appelle $E(x) = [x]$ = partie entière de x.

-$E(x)$ est une **fonction croissante sur $\boldsymbol{R}$ et constante sur $\boldsymbol{[n\ ;n + 1[\ ;n \in Z}$**

-$E(x)$ continue sur $R\backslash Z$ et pour $n \in Z$ continue à droite mais pas à gauche.

-$\forall x \in R\ ,\forall n \in Z\ ,\boldsymbol{E(x + n) = E(x) + n}$

-$E(x) \in Z$ $\boldsymbol{x - 1} < E(\boldsymbol{x}) < x < E(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{1}$

<u>4-Intervalles de R.</u>

Intervalle.

-$\forall \boldsymbol{x,y \in I}$, $\forall \boldsymbol{z \in R}\ ,[\boldsymbol{x \leq z \leq y} \ \rightarrow \boldsymbol{z \in I}]$

-Par convention, $\emptyset$ **est un intervalle de $\boldsymbol{R}$**

-Soit I un intervalle <u>non vide bornée</u> de R alors : I admet $\begin{cases}\textbf{Une borne supérieure b}\\ \textbf{Une borne inférieure a}\end{cases}$ et on a $\begin{cases}\forall x \in I\ ,a \leq x \leq b\\ \forall x \in R\ ,a < x < b\ \rightarrow x \in I\end{cases}$

-Soit I un intervalle minoré et non majoré alors I possède une **borne inférieure $\boldsymbol{a}$** et $\begin{cases}\forall x \in I\ ,x \geq a\\ \forall x \in R\ ,[x > a\ \ \rightarrow x \in I]\end{cases}$

-Soit I **majorée** et **non minorée** de R alors I possède une **borne supérieure $\boldsymbol{a}$** et $\begin{cases}\forall x \in I\ ,x \leq a\\ \forall x \in R\ ,[x < a\ \ \rightarrow x \in I]\end{cases}$

-Soit I un intervalle de R **non majoré** et **non minoré** alors $I = R$

Types d'intervalles de $\boldsymbol{R}$

-Si I un intervalle non vide de R, on a : -$I = R$ (ni majoré , ni minoré)

-$I = [a\ ;\ +\infty[\ ,]a\ ;\ +\infty[$ (minoré , non majoré)

-$I =]-\infty\ ,\ b]\ ,]-\infty\ ,\ b[$ (majoré , non minoré)

-$I = [a\ ,b]\ ,]a\ ,b]\ ,[a\ ,b[\ ,]a\ ,b[$ (borné)

-L'intersection de deux intervalles de R est **un intervalle** de R.

-La réunion de deux intervalles de R **non disjoint** est un **intervalle de $\boldsymbol{R}$.**

-La réunion de deux intervalles quelconques de R n'est **pas forcément un intervalle** de R.

≥ Tout intervalle de $]\boldsymbol{a}\ ,\boldsymbol{b}[$ **où** $\boldsymbol{a} < b$ contient au moins **un rationnel** : on dit que **$\boldsymbol{Q}$ est dense dans $\boldsymbol{R}$.**

- Tout intervalle de $]\boldsymbol{a}\ ,\boldsymbol{b}[$ **où** $\boldsymbol{a} < b$ contient au moins **un irrationnel** : on dit que **$\boldsymbol{R\backslash Q}$ est dense dans $\boldsymbol{R}$.**

-Tout intervalle contenant au moins **deux points** contient **une infinité de rationnel et d'irrationnels.**

→ Si I contient un nombre fini de rationnels, on les classe par ordre croissant. ($r_1 < r_2 < \cdots < r_n$

-L'intervalle $]r_1 , r_2[$ ne contient pas un rationnel → contradiction avec $\geq$

MOUVEMENT
DE L'ESIB
SOLIDAIRE