

Cours

Rédigé par Jihad Tannoury

Communication analogique et numérique

2^{ème} Biomédical

Semestre 1

Veuillez respecter l'auteur de ce document.
Droits de reproduction et de diffusion réservés.

* $x(f) \Leftrightarrow x(t)$ un signal quelconque.

* $Z_x(f) = 2|U(f)|X(f)$ signal analytique.

* $A_x(f) = Z_x(f + f_0)$ enveloppe complexe

$x(t)$

$$* Z_x(t) = x(t) + j\hat{x}(t)$$

$$* \alpha_X(t) = Z_x(t) e^{-j2\pi f_0 t} = (x(t) + j\hat{x}(t)) e^{-j2\pi f_0 t}$$

$$* x(t) = \text{Ré}[Z_x(t)] = \text{Ré}[\alpha_X(t) e^{j2\pi f_0 t}]$$

$$* \alpha_X(t) = p(t) + j q(t) = a(t) e^{j\phi(t)}$$

$$* x(t) = p(t) \cos 2\pi f_0 t - q(t) \sin 2\pi f_0 t$$

$$* p(t) = \text{Ré}[\alpha_X(t)] = \frac{1}{2} [\alpha_X(t) + \alpha_X^*(t)]$$

$$* q(t) = \text{Im}[\alpha_X(t)] = \frac{1}{2j} [\alpha_X(t) - \alpha_X^*(t)]$$

$$* x(t) = a(t) \cos(2\pi f_0 t + \phi(t))$$

* Filtrage

$$Z_Y(f) = H(f) \cdot Z_x(f)$$

$$A_Y(f) = H(f + f_0) \cdot A_x(f)$$

* Dans le cas d'un signal aléatoire on obtient

$$S_x(f) = 4 S_x^+(f + f_0), P_p = P_q = \frac{P_a}{2} = P_x$$

$$S_x = \frac{1}{2} (S_x(f - f_0) + S_x(-f - f_0))$$

MOUVEMENT
DE L'ESIE
DE SOLIDAIRE

Modulations linéaires :

* Modulation DB SP : (double bande sans porteur)

$m(t)$ signal modulant

$$s(t) = A m(t) \cos(2\pi f_0 t) \quad \text{signal modulé}$$

• pas de pure perte au niveau du transport

• nécessite une démodulation cohérente (il faut savoir f_0 et ϕ)

• démodulation chère ($\propto 2 \cos(2\pi f_0 t)$)

• $B = 2b$ / B : bande de $s(t)$ b : bande de base.

$$s(f) = \frac{A}{2} [M(f-f_0) + M(f+f_0)]$$

* Modulation DB AP : (double bande avec porteur)

$$s(t) = A(1+K_a m(t)) \cos(2\pi f_0 t)$$

• perte pure au niveau de la porteur

• démodulation non cohérente

moins chère et facile : détection d'enveloppe

de l'onde

K_a : taux de modulation (maintenir l'enveloppe au dessus)

$$K_a |m(t)|_{\max} \leq 1$$

• $B = 2b$

• Modulation :- comme DB SP
- non linéaire

$$A_{\max} = A(1+K_a)$$

$$A_{\min} = A(1-K_a)$$

$$K_a = \frac{A_{\max} - A_{\min}}{A_{\max} + A_{\min}}$$

$$A = \frac{A_{\max} + A_{\min}}{2}$$

* Modulation BLU: bande latérale unique.

on a pensé à cette modulation pour réduire la grandeur de la bande utilisée pendant la transmission (b au lieu de $2b$)

- obtenue à l'aide d'une DBSP puis filtrage au biais une modulation fondée sur l'expression temporelle.
- BLU supérieur : de f_0 à $f_0 + b$
- BLU inférieur : de f_0 à $f_0 - b$
- utilisable pour les signaux avec une énergie nulle pour les fréquences faibles car le filtre qui va couper la bande n'est pas idéale donc ne peut pas couper juste à f_0 .
- si Δf (l'écart entre bande inf et bande sup) est << devant f_0 , de façon que $\frac{f_0}{\Delta f} > 100$ on a un problème.
on fait alors plusieurs BLU / $f_0 = f_{01} + f_{02} (+ f_{03} \dots)$
avec $\frac{f_{01}}{\Delta f} < 100$ puis $\frac{f_{02}}{2(\Delta f + f_{01})} < 100$ et $f_0 = f_{01} + f_{02}$

• $B = b$

- Expression temporelle: $s(t) = \frac{A}{2} [m^+(t) e^{j2\pi f_0 t} + m^-(t) e^{-j2\pi f_0 t}]$

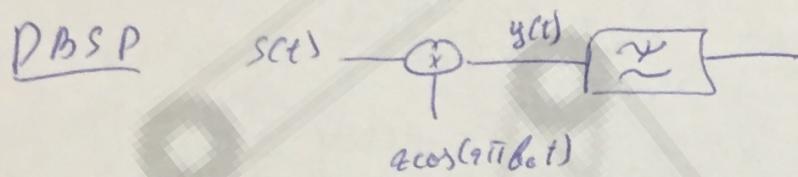
$$s(t) = A \left[m(t) \cos 2\pi f_0 t + \begin{array}{l} \text{pour la BLU inférieure} \\ \hat{m}(t) \sin (2\pi f_0 t) \end{array} \right] - \begin{array}{l} \text{pour la BLU supérieure} \\ - \hat{m}(t) \sin (2\pi f_0 t) \end{array}$$

avec $m^-(t) = m(t) - j\hat{m}(t)$

$$m^+(t) = m(t) + j\hat{m}(t) \quad (\text{analytique})$$

$$s(f) = \frac{A}{2} [M^+(f-f_0) + M^-(f+f_0)]$$

démodulation cohérente : f_0 et ϕ bien connue
 comme pour la DBSP, si on a une différence de f_0 alors
 le signal change tout à fait.
 mais si ϕ change on détecte le \hat{m} signal mais la
puissance utile reste ici la même
 alors que pour la DBSP P_u diminue.



$$y(t) = A m(t) \cos(2\pi f_0 t) + \hat{m}(t) \cos(4\pi f_0 t)$$

$$= A m(t) \cos^2(2\pi f_0 t)$$

$$y(t) = A m(t) [1 + \cos 4\pi f_0 t]$$

$$y(t) = A m(t) \cos \phi$$

$$P_u = A^2 |M(t)|^2 \cos^2 \phi$$

BLU $y(t) = A [m(t) (1 + \cos 4\pi f_0 t) - \hat{m}(t) \sin 4\pi f_0 t]$

$$y(t) = A m(t) \cos \phi + \hat{m}(t) \sin \phi$$

$$P_u = A^2 |M(t)|^2 (\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) \Rightarrow P_u > P_d$$

BLU est mieux que DBSP pour la puissance utile (point de vue déphasage)

* Problème : si un signal possède une NRJ non nulle pour les fréquences faibles, quoi faire ??
 → BLR. Bande latérale résiduelle.

* BLR : (Bande latérale résiduelle)

③

- $B = (1 + \alpha) b$

- possibilité de transmettre des signaux avec une énergie au niveau des fréquences autour de f_0 .
 - avec porteur
- 2 types
 - sans porteur

sans porteur : $s(t) = A \cos 2\pi f_0 t + K A m_q(t) \sin 2\pi f_0 t$

démodulation cohérente

avec porteur : $s(t) = A[1 + K_m(t)] \cos 2\pi f_0 t + K A m_q(t) \sin 2\pi f_0 t$

démodulation non cohérente
détecteur d'enveloppe.

* Critères de choix :

- consommation spectrale
- consommation d'énergie, résistance aux bruits
- résistances aux distorsions non-linéaires
- Possibilité de démodulation non-cohérente
- simplicité

Modulation de fréquence

- $s(t) = a(t) \cos(2\pi f_0 t + \phi(t))$
- Dans cette modulation, le signal modulant doit être dans la phase.
- on a: phase instantanée : $\phi_i = 2\pi f_0 t + \phi(t)$
fréquence : $f_i = \frac{1}{2\pi} \frac{d\phi_i}{dt} = f_0 + \frac{1}{2\pi} \frac{d\phi(t)}{dt}$
- modulation de fréquence alors f_i est une fonction linéaire de $m(t)$
- $$f_i = f_0 + K_f m(t)$$
 K_f : sensibilité du modulateur
- $$\phi_i = 2\pi f_0 t + 2\pi K_f \int_0^t m(u) du$$
- $$s(t) = A \cos(2\pi f_0 t + 2\pi K_f \int_0^t m(u) du)$$
- $$s_{HP}(t) = A \cos(2\pi f_0 t + K_p m(t))$$
 (modulation angulaire) $K_p = 2\pi K_f$
- Dans ce type, l'information se trouve dans la fréquence, l'amplitude est constante. $|s_{HP}(t)| = A = \text{constante}$
- très grande immunité au bruit
- Puissance constante = $\frac{A^2}{2}$
- Résistance à la non linéarité
- Problème: $s(f)$ difficile à obtenir (il y a des résultats parachutés à retenir)

• Cas simple : $m(t) = A_m \cos 2\pi f_m t$ (4)

• $F_i = f_0 + K_f m(t) = f_0 + K_f A_m \cos 2\pi f_m t$

• $F_i(t) \in [f_0 \pm K_f A_m]$ $\sigma = 2\pi f_m t + \frac{K_f A_m}{f_m} \sin 2\pi f_m t$

• $\Delta f = K_f A_m$ excursion maximale

• indice de modulation $B = \frac{K_f A_m}{f_m}$

• $S(t) = A \cos(2\pi f_0 t + B \sin 2\pi f_m t)$

•
$$S(t) = A \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(B) \cos(2\pi(f_0 + n f_m)t)$$
 $J_n(B)$ fonction de Bessel

$$\Rightarrow S(f) = \frac{A}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(B) (S(f - f_0 - n f_m) + S(f + f_0 + n f_m))$$

on remarque qu'on a un spectre infini en fonction de n .

• Cas de 2 sinusoides : $m(t) = A_1 \cos 2\pi f_1 t + A_2 \cos 2\pi f_2 t$

• on pose $B_1 = \frac{K f_1 A_1}{f_1}$ $B_2 = \frac{K f_2 A_2}{f_2}$

$S(t) = A \cos(2\pi f_0 t + B_1 \sin 2\pi f_1 t + B_2 \sin 2\pi f_2 t)$

$S(t) = A \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_m(B_1) J_n(B_2) \cos[2\pi(f_0 + m f_1 + n f_2)t]$

de ce cas on a création de raies ($f_0 \pm m f_1 \pm n f_2$)

* Indice de modulation généralisé :

- sinusoïdale $\rightarrow \beta = \frac{\Delta f}{f_m} = \frac{K_f \cdot A_m}{f_m}$ (car le maximum est A_m)
- des le cas général $\rightarrow \beta = \frac{K_f |m(t)|_{\max}}{b}$
 b = largeur de bande du signal modulant.
 alors $\Delta f = K_f |m(t)|_{\max}$

* Modulation à faible indice :

$s(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \phi(t))$
 $s(t) = A \cos(2\pi f_0 t) \cos \phi(t) - A \sin(2\pi f_0 t) \sin \phi(t)$
 or
 $s(t) = A \cos(2\pi f_0 t + B \sin(2\pi f_m t))$
 si B est faible avec $B = \frac{K_f |m(t)|_{\max}}{f_m} = |\phi(t)|_{\max}$
 $\Rightarrow \phi(t)$ est faible $\cos \phi = 1 \quad \sin \phi = \phi$
 $\Rightarrow s(t) = A \cos(2\pi f_0 t) - A \sin(2\pi f_0 t) \phi(t)$
 $S(f) = \frac{A}{2} \left[S(f-f_0) + S(f+f_0) \right] - \frac{A}{2j} \left[\phi(f-f_0) - \phi(f+f_0) \right]$

mais $\phi(t) = 2\pi K_f \int_0^t m(u) du$

$$\frac{d\phi(t)}{dt} = 2\pi K_f m(t) \iff j 2\pi f \phi(f) = 2\pi K_f M(f)$$

$$\Rightarrow \phi(f) = \frac{K_f M(f)}{j f}$$

$$\rightarrow S(f) = \frac{A}{2} [S(f-f_0) + S(f+f_0)] + \frac{A K_f}{2} \left[\frac{M(f-f_0)}{f-f_0} - \frac{M(f+f_0)}{f+f_0} \right]$$

* Modulation à grand indice :

(5)

. Théorème de Woodward :

si $B = \frac{df}{b} = \frac{K_f |m(t)|_{\max}}{b}$ est très grand ,
la densité spectrale de puissance $S_s(f)$ à la même forme
que la densité de probabilité de $m(t)$

- $S_s(f)$, $P_m(x)$ et $m(t)$

on obtient alors $S_s(f) = \frac{A^2}{4K_f} \left(P_m \left(\frac{f-f_0}{K_f} \right) + P_m \left(\frac{f+f_0}{K_f} \right) \right)$

⚠ si $m(t)$ suit la loi normale $\rightarrow |m(t)|_{\max} = 3\sigma$

* Largeur de bande utile :

• Règle de Carson :

$$B = 2(B+1)f_m$$

$$= 2(df + f_m) \text{ car } df = 3f_m$$

• Règle des 1% :

$$B = 2N(B)f_m$$

généralement on peut tirer $N(B)$ d'un tableau, sinon :

B	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$N(B)$	3	4	6	7	8	9	10	11	12	13

il y a un compromis,
généralement on fait

la moyenne

* Génération des signaux F.M.

Cette génération peut être réalisée en réalité de 2 manières : directe et indirecte.

• Méthode directe :

En utilisant un VCO (voltage controlled oscillator) voir principe page 78.

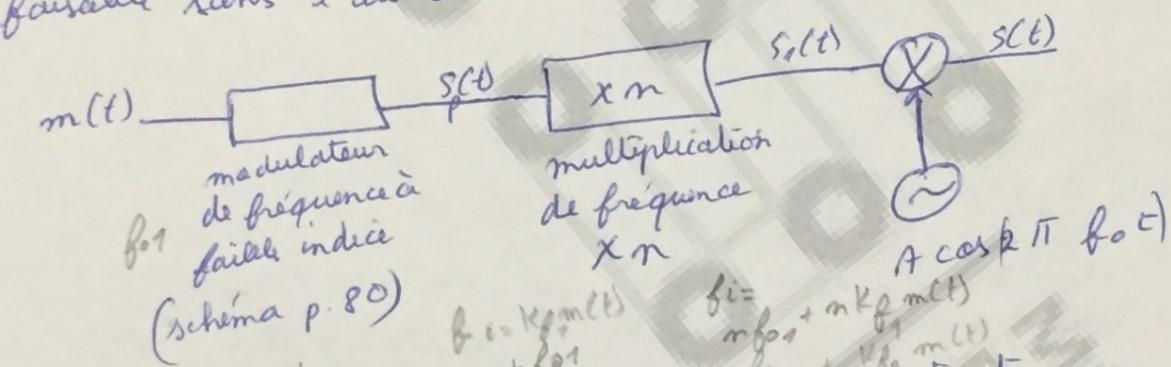
avantage : obtenir des excursions de fréquence importantes.
inconvénient : instabilité des matériels qui le constituent.

• Méthode indirecte : modulateur d'Armstrong :

- fondée sur la notion de modulation à faible indice

$$s(t) \approx A \cos(2\pi f_0 t) - A m(t) \sin(2\pi f_0 t)$$

- faisable sans l'utilisation d'un VCO → stabilité



avantage :
- excursion de fréquence importante
- stabilité

inconvénient :
- distorsion sur le signal démodulé
- complexité de réalisation

△ récemment, on a trouvé des méthodes pour assurer la stabilité et on utilise souvent les VCO : Méthode Direct

X Demodulation des Signaux FM: (ma trame 3 langues)

⑥

- Il y a plusieurs méthodes, on va se limiter à deux.

1. Ya Discriminateur: Transforme les variations de fréquence en variations d'amplitude

$$- s(t) = A \cdot \cos(2\pi f_0 t + 2\pi K_f \int_0^t m(u) du)$$

$$s(t) = A \cdot \cos(2\pi f_0 t + \phi(t))$$

$$- s'(t) = -A(2\pi f_0 t + \phi'(t)) \sin(2\pi f_0 t + \phi(t))$$

on remarque que $\phi'(t) = 2\pi K_f m(t)$ se trouve dans l'enveloppe de $s'(t)$ donc pour trouver $m(t)$, il suffit d'éluder l'enveloppe.

Pour cela l'idée du discriminateur sera formé de :

- un démodulateur ($H(f) = 2\pi i f$) (voir schéma p. 83)
- un détecteur d'enveloppe.

Inconvénients:

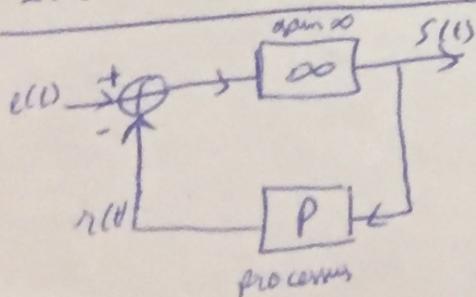
- ce démodulateur est sensible aux variations d'amplitude parasite.
- plage de linéarité du démodulateur est très faible

D mais heureusement, il ya les limitateurs pour résoudre le premier problème.

D'autre part on a des circuits qui peuvent agrandir la portée linéaire de $|H(f)|$

- Avantage: simple à réaliser (limiteur + discriminateur) et peu coûteux.

2. Ya Boucle à verrouillage de phase:



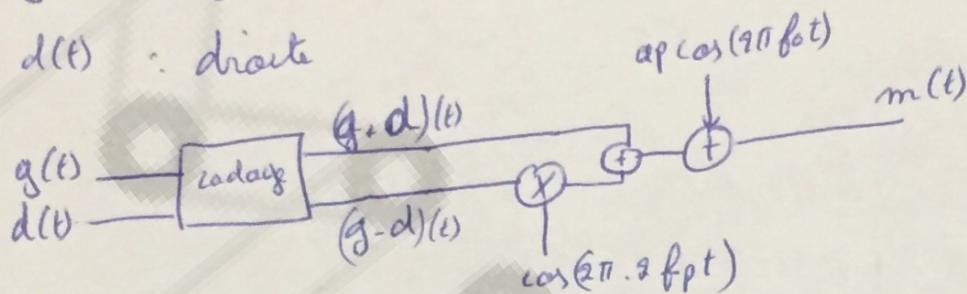
Principe: $\varepsilon(t) = e(t) - r(t) = e(t) - P[s(t)]$
pour les systèmes stables il faut que $\varepsilon(t) = 0$ sinon sera instable \Rightarrow on aura $e(t) = P[s(t)]$
 $\Rightarrow s(t) = P[e(t)]$ alors si $e(t)$ est le signal modulé FM et P est le processus de modulation $\rightarrow s(t)$ est le signal modulant.

* Récepteur FM stéréophonique :

- un signal stéréophonique est composé de 2 signaux :

- $g(t)$: gauche

- $d(t)$: droite



⚠ Toujours on prend $f_p = 13 \text{ KHz}$

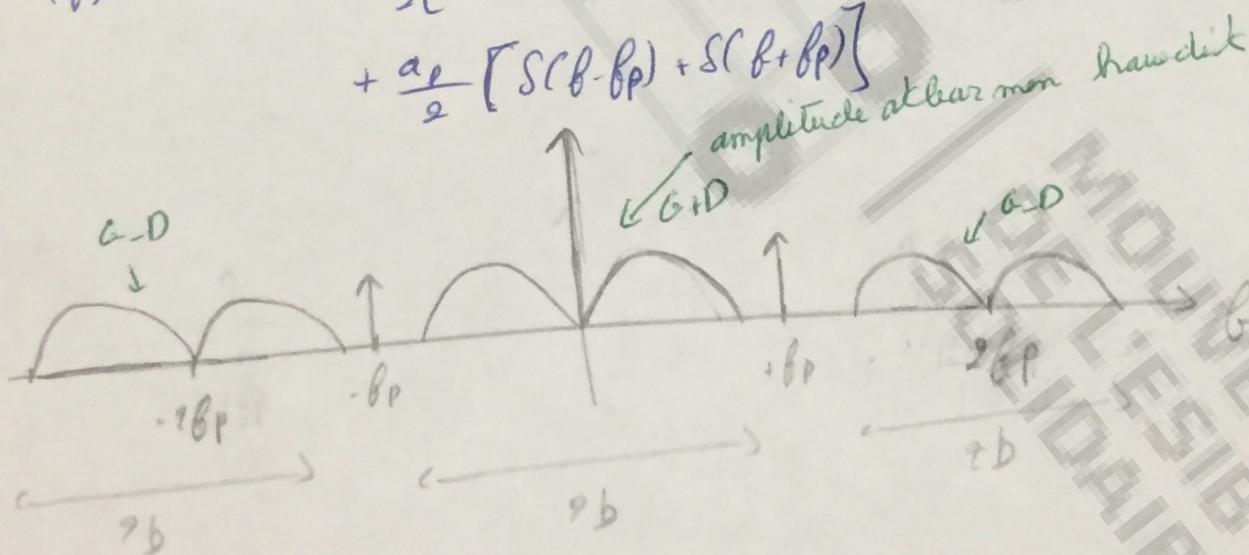
signal composite:

$$s(t) = (g+d)(t) + (g-d)(t) \cdot \cos(2\pi \cdot 2f_p t) + a_p \cdot \cos(2\pi f_p t)$$

- Pour la démodulation, voir le schéma dans le cours.
et pour la réception aussi

$$S(f) = G(f) + D(f) + \frac{1}{2} (G(f) - D(f)) * \left(\delta(f - 2f_p) + \delta(f + 2f_p) \right) + \frac{\alpha_p}{2} \left(\delta(f - f_p) + \delta(f + f_p) \right)$$

$$S(f) = G(f) + D(f) + \frac{1}{2} [G(f - 2f_p) - D(f - 2f_p) + G(f + 2f_p) - D(f + 2f_p)] \\ + \frac{\alpha_p}{2} [S(f - f_p) + S(f + f_p)]$$



⚠ si g et d sont de bande b alors leur somme et leur différence est aussi de bande b .

si on a une modulation quelconque, on prend $s(t)$ puis on le module.

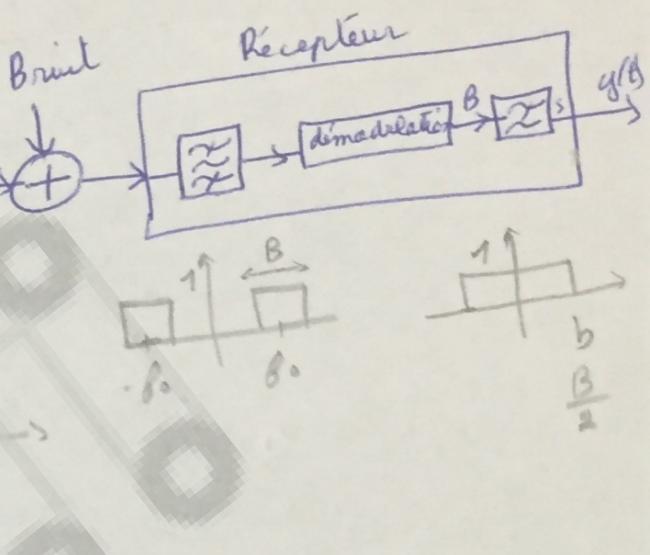
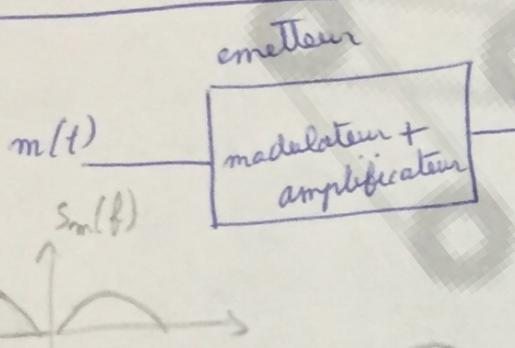
⚠ voir le préfiltre et les problèmes sur le cours (pas très important).

* Bruit dans les modulations :

- Le matériel qui constitue la chaîne de transmission n'est pas idéal, le signal sera alors perturbé car un bruit va s'additionner.
 - Après démodulation, le signal obtenu est :
- $$y(t) = K \cdot m(t) + \text{termes de bruit.}$$
- (si le signal et le bruit s'additionnent, mais si les 2 se multiplient, on a autre chose)

$$\frac{S}{B} = \frac{P_S}{P_B}$$

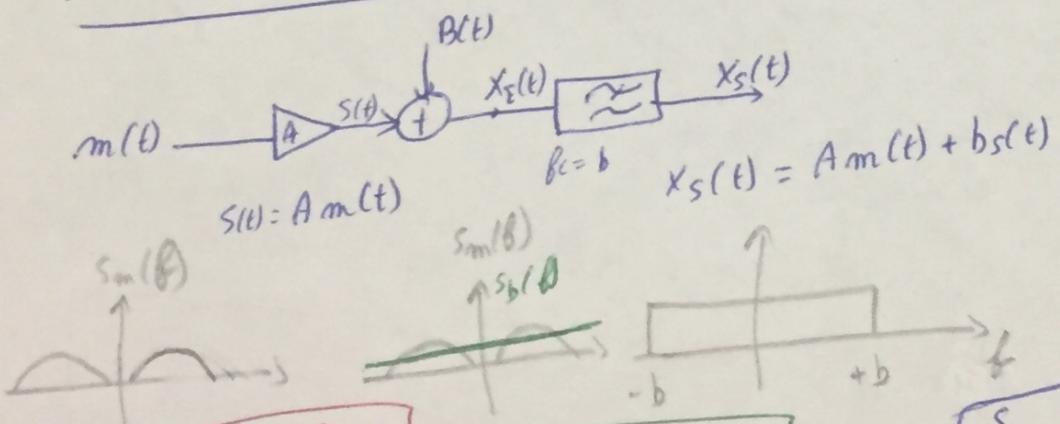
. Modèle de transmission :



$$y(t) = K m(t) + b s(t)$$

$$\frac{S}{B} = \frac{P_u}{P_{Bs}} = \frac{K^2 P_m}{P_{Bs}}$$

. Transmission en Bande de base :



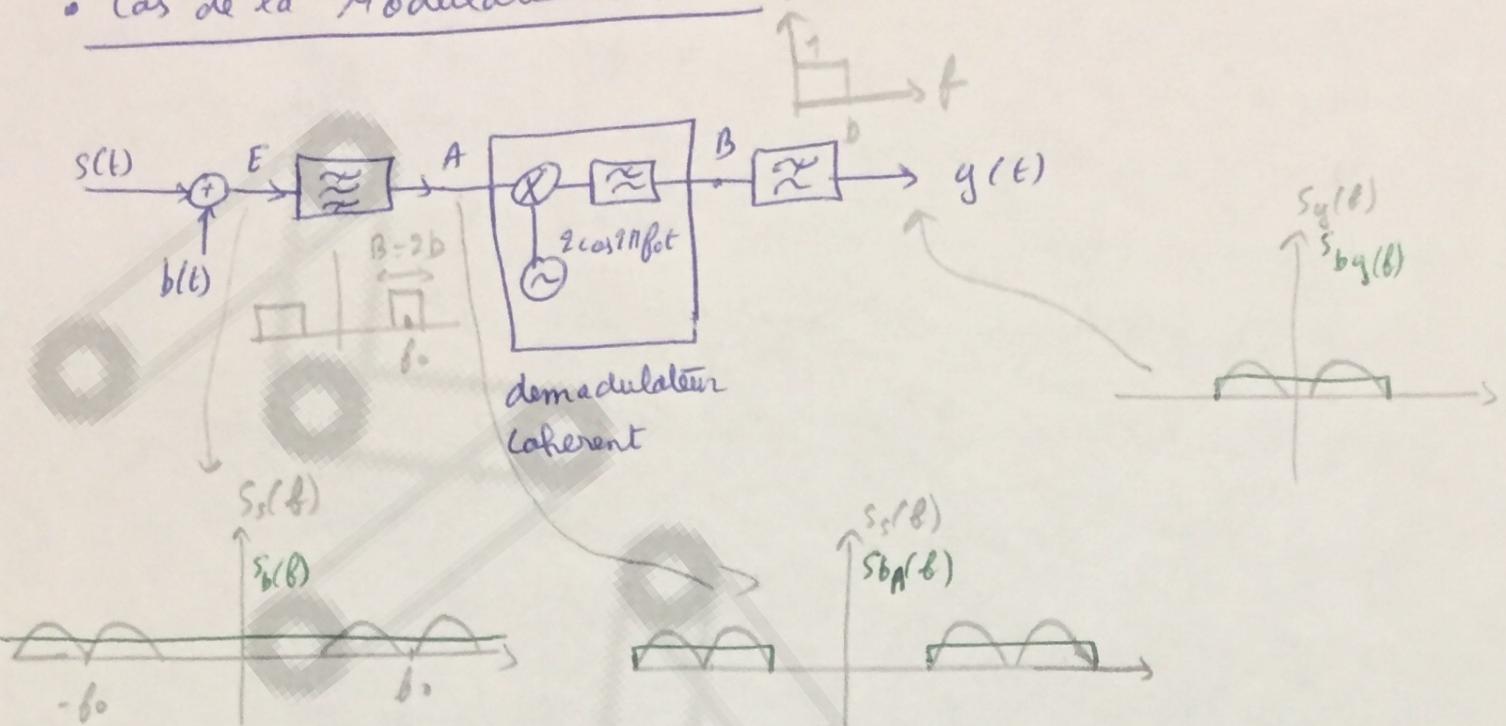
$$P_B = A^2 P_m$$

$$P_B = \frac{N_0 b}{(\frac{W_0}{2} \times 2b)}$$

$$\frac{S}{B} = \frac{A^2 P_m}{N_0 b}$$

on prend un bruit Gaussien $A W & N$ (additif white Gaussian Noise) alors $S_b(f) = \frac{N_0}{2}$

Cas de la Modulation DBSP:



$$\text{en } E: x_E(t) = s(t) + b(t) = A_m(t) \cos(2\pi f_0 t) + b(t)$$

$$\text{en } A: x_A(t) = A_m(t) \cos(2\pi f_0 t) + b'(t) \quad b': \text{bruit filtré}$$

$$b'(t) = p(t) \cos(2\pi f_0 t) - q(t) \sin(2\pi f_0 t)$$

$$\Rightarrow x_A(t) = [A_m(t) + p(t)] \cos(2\pi f_0 t) - q(t) \sin(2\pi f_0 t)$$

$$\text{en } B: x_B(t) = A_m(t) + p(t)$$

$$\text{en } S: x_S(t) = A_m(t) + p(t) = A_m(t) + b_S(t)$$

$$P_u = A^2 P_m$$

$$P_b = 2N_0 b \quad (\text{car bruit blanc}) \quad P_p = P_q = \frac{P_a}{2} \quad \text{avec } P_a = 4N_0 b$$

$$\frac{S}{B} = \frac{P_u}{P_b} = \frac{A^2 P_m}{2N_0 b}$$

$$\text{mais } s(t) = A_m(t) \cos 2\pi f_0 t \rightarrow S(f) = \frac{A^2}{2} [\mathcal{U}(f-f_0) + \mathcal{U}(f+f_0)]$$

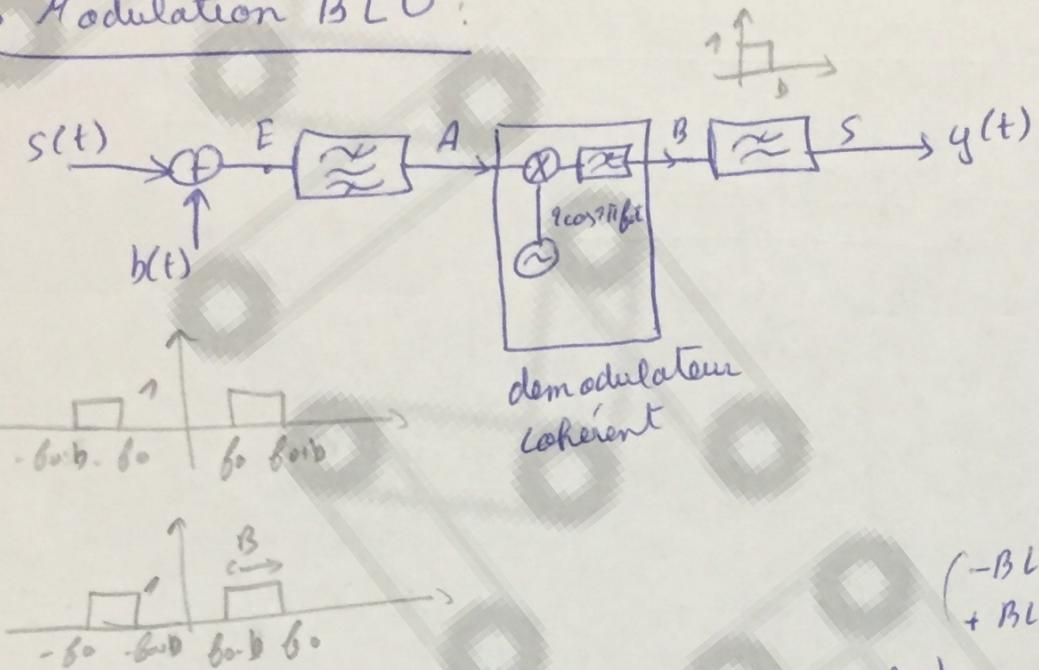
La puissance en sortie initiale $\rightarrow P = \frac{A^2}{2} \cdot P_m$

$$\begin{aligned} & \text{d'où } A^2 P_m = 2P \\ & \Rightarrow \frac{S}{B} = \frac{A^2 P_m}{2N_0 b} = \frac{2P}{2N_0 b} = \frac{P}{N_0 b} = 8 \end{aligned}$$

- le gain de référence 8 est celui du signal en bande de base sans amplification donc $G_{dB} = 20 \log \left(\frac{P_{av}}{P_s} \right) = 20 \log 1 = 0$ ⑧
- on a même gain pour DBSP et bande de base

Modulation BLU :

ds ce cas $B=b$



$$s(t) = A_m(t) \cos(2\pi f_0 t) \pm A_m(t) \sin(2\pi f_0 t)$$

$$p = A^2 P_m \quad (\text{car signal initial est } A_m(t))$$

$$x_E(t) = A_m(t) \cos(2\pi f_0 t) \pm A_m(t) \sin(2\pi f_0 t) + b(t)$$

$$x_A(t) = [A_m(t) + p(t)] \cos(2\pi f_0 t) + [\pm A_m(t) - q(t)] \sin(2\pi f_0 t)$$

démodulation cohérente $\rightarrow x_B = A_m(t) + p(t)$

$$y(t) = A_m(t) + p(t)$$

problème : $p(t)$ ici n'est pas la même qu'avant \rightarrow le filtre n'est pas centré en f_0 $\rightarrow P_{bs} \neq \frac{P_a}{2} \neq 2Nob$

[la moitié d'avant car B est divisée par 2]

Dans ce cas $P = A^2 P_m$ alors on obtient

$$P_{bs} = P_p = Nob$$

(voir page 112)

$$\boxed{\frac{S}{B} = \frac{A^2 P_m}{Nob} = \frac{P}{Nob} = 8}$$

$$20 \log \left(\frac{(S/B)}{8} \right) = 0$$

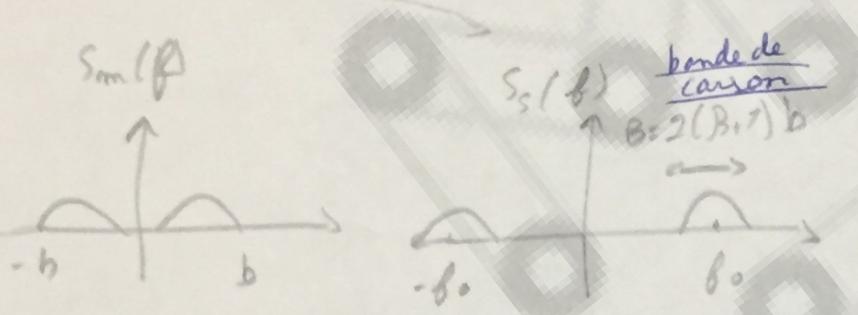
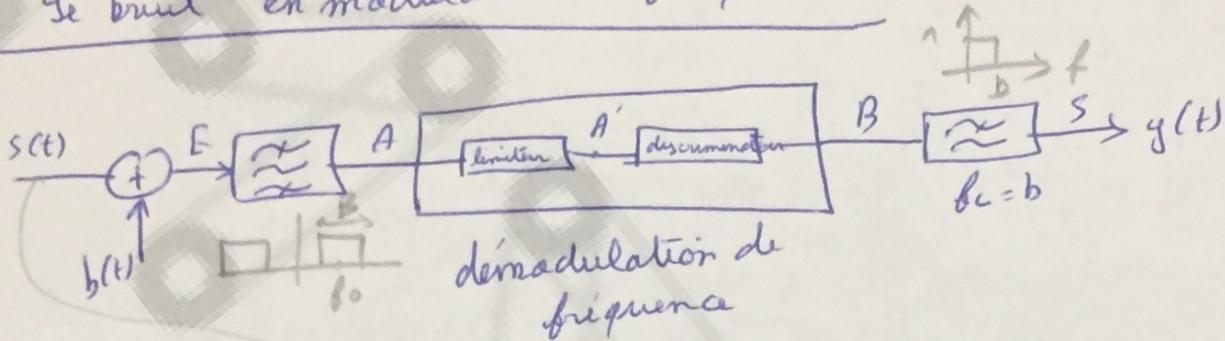
même performance qu'avant

• Modulation DBAP :

- au cours de la démodulation, (détecteur d'enveloppe), on va perdre le caractère additif.

- on laisse tomber l'étude de Bruit dans cette modulation.

• Le bruit en modulation de fréquence:



$$\frac{B}{2} = (B+1)b$$

$$x_A(t) = s(t) + b_A(t)$$

$$x_A(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \phi(t)) + b_A(t)$$

$$\text{avec } \phi(t) = 2\pi K_f \int_0^t m(u) du$$

$$\begin{cases} b_A(t) = p \cos(2\pi f_0 t) - q \sin(2\pi f_0 t) \\ b_A(t) = r(t) \cos(2\pi f_0 t + \theta(t)) \end{cases}$$

$$x_A(t) = R(t) \cos(2\pi f_0 t + \Psi(t))$$

$$x'_A(t) = R(t) \cos(2\pi f_0 t + \Psi(t)) \quad (\text{élimination des variations de l'enveloppe à l'aide du limiteur.})$$

$$x_B(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\Psi(t)}{dt} = K_f m(t) + b_B(t)$$

$$y(t) = K_f m(t) + b_s(t)$$

$$\frac{S}{B} = \frac{K_f^2 P_m}{P_{BS}} = \frac{P_u}{P_{BS}}$$

- calcul de $\Psi(t)$: (en utilisant le diagramme de Fresnel) ⑨

$$\bullet \Psi(t) = \phi(t) + \arctan \left[\frac{n(t) \sin(\omega t) - \phi(t)}{A + n(t) \cos(\omega t) - \phi(t)} \right] \quad (\text{p. 124 ou manuscrit})$$

$$x_B(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\Psi(t)}{dt}$$

✓ Kin Zetche badda simplification

$$\bullet x_B = K_f m(t) + \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} \left[\arctan \left(\frac{n(t) \sin(\omega t) - \phi(t)}{A + n(t) \cos(\omega t) - \phi(t)} \right) \right]$$

- Simplification: Dawning

- $\phi(t)$ produit des composantes spectrales de bruits nécessaires des fréquences $|f| > b$. \rightarrow éliminées par le filtre passe-bas

$$- x_B = K_f m(t) + b_s(t)$$

$$x_B = K_f m(t) + \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} \left[\arctan \frac{q_A(t)}{A + P_A(t)} \right]$$

avec $q_A(t) = n(t) \sin(\omega t)$
 $P_A(t) = n(t) \cos(\omega t)$

• 7 son bas ba3da 3 etché

- 2ème simplification: Comportement asymptotique

④ bruit négligeable devant le signal : $A + P_A \approx A$

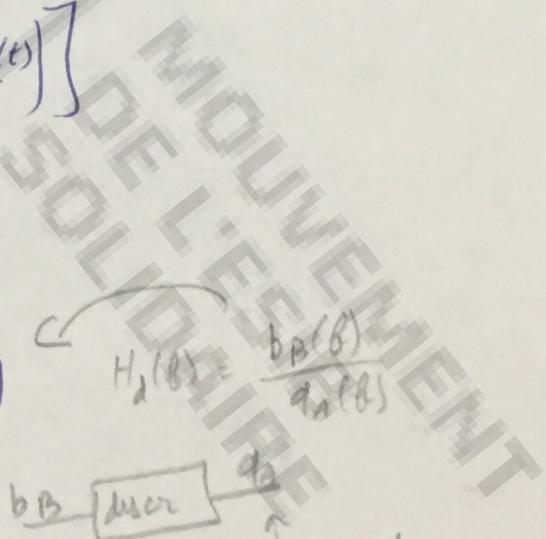
$$\bullet x_B(t) = K_f m(t) + \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} \left[\arctan \left(\frac{q_A(t)}{A} \right) \right]$$

$$\approx K_f m(t) + \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} \left[\frac{q_A(t)}{A} \right]$$

$$\bullet x_B(t) \approx K_f m(t) + \frac{1}{2\pi A} \frac{d}{dt} (q_A(t))$$

$$\bullet X_B(f) = K_f H(f) + \frac{1}{2\pi A} j 2\pi f q_A(f)$$

$$\boxed{X_B(f) = K_f H(f) + \frac{j f}{A} q_A(f)}$$

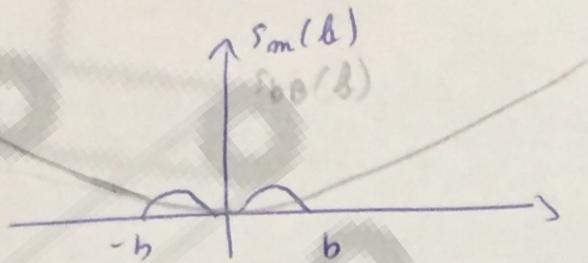


$$\bullet S_b(f) = |H(f)|^2 \cdot S_{q_A}(f) = \frac{f^2}{A^2} S_{q_A}(f)$$

$\xrightarrow{\text{2e après filtrage}}$
 $\xrightarrow{\text{par un discriminateur}}$

alors $S_{bB}(f) = \begin{cases} \frac{N_0 f^2}{A^2} & f \in [-\frac{B}{2}; \frac{B}{2}] \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$

et aussi $S_{bs}(f) = \begin{cases} \frac{N_0 f^2}{A^2} & f \in [-b; b] \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$



forme parabolique
moussale.

$$P_{bs} = \int_{-b}^b S_{bs} = \boxed{\frac{2 N_0 b^3}{3 A^2}}$$

$$\text{gain de la mal.} = \frac{3 K_f^2 P_m}{b^2}$$

$$\frac{S}{B} = \frac{\frac{K_f^2 P_m}{2 N_0 b^3}}{\frac{3 A^2}{2}} \quad \boxed{\frac{S}{B} = \frac{3 \sqrt{A} K_f^2 P_m}{2 N_0 b^3}}$$

$$\text{or } P = \frac{A^2}{2} \Rightarrow \frac{S}{B} = \frac{P_p P_m 3 K_f^2}{N_0 b^3} =$$

$$\frac{P}{N_0 b} \cdot \boxed{\frac{3 K_f^2 P_m}{b^2}}$$

Ex: si $m(t) = a_m \cos(2\pi f_m t) \rightarrow P_m = \frac{a_m^2}{2}$

$$G = \frac{3 K_f^2 P_m}{b^2} = \frac{3}{2} \left(\frac{K_f^2 a_m^2}{b^2} \right) = \frac{3}{2} \left(\frac{K_f a_m}{b} \right)^2 = \frac{3}{2} \cdot \frac{B^2}{2}$$

$$\text{si } B=3 \rightarrow G = \frac{75}{2} \quad G_{dB} = 15.75 \text{ dB}$$

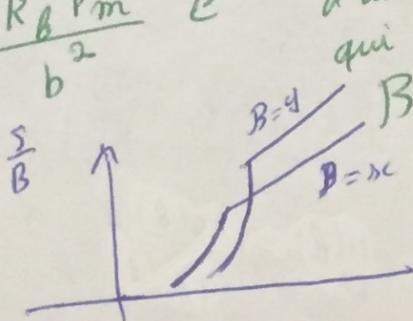
Récapitulation:

$$\frac{S}{B} = \frac{3 A^2 K_f^2 P_m}{2 N_0 b^3} \quad \text{avec } P = \frac{A^2}{2}$$

condition bruit faible.

$$G = \frac{S}{B} = \frac{S}{\frac{P}{N_0 b}} = \frac{3 K_f^2 P_m}{b^2}$$

ceci est vrai à partir d'un certain seuil qui varie en fonction de



(D) Préaccentuation et désaccentuation
non cours bas
mich intérieur

Partie II:Communication Numérique* Introduction:

- un message numérique est un message formé d'une suite de symboles appartenant à un ensemble de cardinal M . (M -air) bin air

- 010001

- abcdd bcaa

- +1 -1 -1 +1 +1 -1

- +1 0 -1 00 +1

- débit $D_b = \frac{1}{T_b}$ bits/s T_b période temps entre 2 bits

- la modulation:
 - d'amplitude T = temps entre 2 symboles
 - de fréquence (de phase)

- $B \propto \frac{1}{T_b}$ bande passante

- T : durée symbolique

- $\frac{1}{T}$: rapidité de la modulation

- 2 critères sont importants:
 - critère de consommation spectrale ($\eta = \frac{D_b}{B}$)
 - d'énergie (Pout)

- D_b : débit binaire

D_s : débit symbole
symbole/seconde

$$D_b = \frac{1}{T_b} = \frac{1}{T} \log_2 M$$

$$\boxed{D_b = \log_2 (M) D_s}$$

avec M le cardinal

$$\text{tjz } M = 2^L$$

$$L = \log_2 (M)$$

- $\lambda = \frac{d^2_{\min}}{E}$: le signal qui a la plus petite est le meilleur

$$\boxed{T = T_b \log_2 M}$$

- $D_s = \text{Band}$

c.à.d. 2400 BAUD \Rightarrow 2400 symbole/sec = 2400 D_s

↗ on peut écrire ceci seulement en connaissant M

Message numérique et signal numérique.

le message numérique ne peut pas se déplacer tout seul.

le " " est la suite de symboles.

le signal numérique est un signal analogique qui transmet le message numérique.

$$\bullet P_b = D_s \log_2 M$$

pour des applications, on a besoin d'un D_b très grand,

donc on peut ou bien augmenter D_s ou bien M .

- si $D_s \nearrow \Rightarrow B \nearrow$ et si B devient $\gg B_{canal}$
 \Rightarrow distortion

- si $M \nearrow \Rightarrow N R J \nearrow$

donc on a un compromis, si on veut une faible consommation d'énergie on varie D_s sinon M et de même pour le critère de consommation spectrale (ça dépend de l'application)

* Chaîne de communication numérique: (voir page 3)

Codage de source:

- Source analogique: on fait une numérisation (quantification) on limite une bande passante et un débit binaire selon l'application et une fréquence d'échantillonnage.

- Source numérique: on choisit le débit et la bande passante

généralement on essaie de réduire le débit le plus possible sans perdre l'information et conserver la qualité.

si $D_b \rightarrow$ précision \rightarrow

Pour réduire le débit on fait une compression (Winzip, Winrar)

ce sont des méthodes de codage des caractères afin de réduire le nbr de bit/charactère (voir exemple moncaux)

• Codage de canal: (codage détecteur / correcteur d'erreurs) AAC automatique repeat request / FEC forward error correction

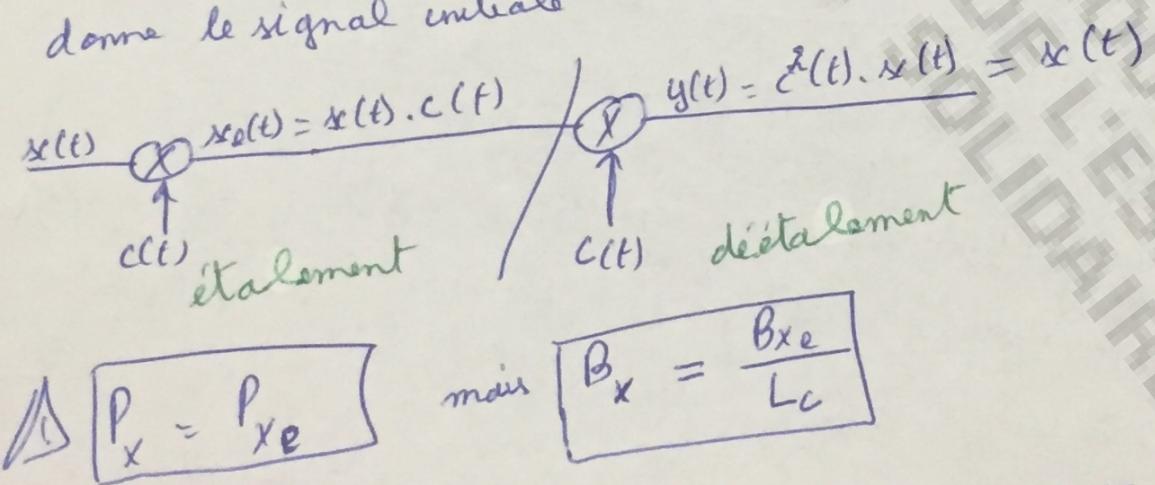
- spécifique pour le numérique.
- on augmente le débit binaire pour ajouter les bits de parité ou de check sum. Le décodeur chez le récepteur connaît la loi de codage et alors peut détecter une erreurs.
- pas trop utiliser car on augmente la complexité des équipements.
un petit exemple sur mon cours page 26

• Modulation:

- le fait d'associer au message numérique une représentation physique sous forme d'un signal électrique : signal numérique.

• Étalement du spectre:

- on fait un étirement suivi d'un déétirement.
- pour réduire l'effet de brouillage intentionnel.
- pour cacher le signal dans le bruit
- Le principe est de multiplier le signal numérique de période T_b par $c(t)$ un signal de période T_c / $T_b = L_c T_c$ $L_c = \frac{T_b}{T_c}$ gain d'étalement
- le signal étalonné sera de bande $\omega_c = L_c B$
- la multiplication du signal étalonné par le signal $c(t)$ nous donne le signal initiale



- si on ajoute alors un bruit à $x_s(t)$, le déétalement de $x_s(t)$ sera un étirement du bruit donc on obtient $x(t) + b_e(t)$
bruit étalonné \rightarrow on réduit l'effet du bruit

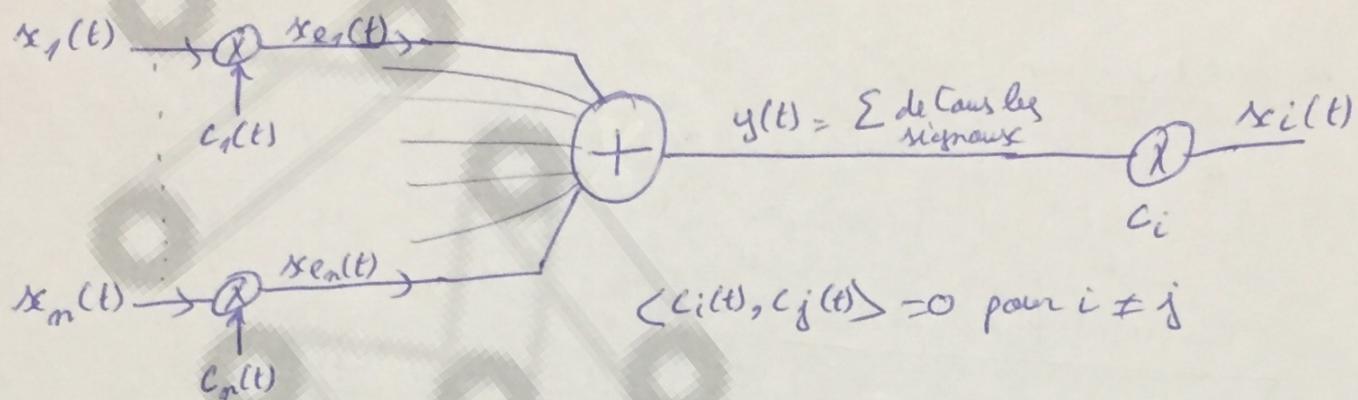
- si sans étalonnage

$$\frac{S}{B} = \frac{P_a}{P_b}$$

alors avec étalonnage $\frac{S}{B} = \frac{P_a}{P_b} \times L_c$

(un exemple dans mon cours page 27)

- Multiplexage par étalonnage :



► en utilisant une base orthonormée pour les c_i

donc pour obtenir un x_i donné il suffit de choisir le c_i correspondant.

► mais un problème c'est que les destinataires ne sont pas équidistants $\langle c_i(t), c_j(t-\tau) \rangle \neq 0 \quad i \neq j$

→ on a d'autres moyens pour résoudre ce problème.

- Milieu de transmission, Démultiplexage, Synchronisation, Egalisation, Annulation d'écho.

① - câble, fibre, espace libre : pour la transmission

② - démodulation : inverse de la modulation.

③ - Pour mettre en accord émetteur / récepteur

④ - Egalisation : filtrage pour réduire l'effet de la distorsion linéaire.

⑤ - annuler l'écho.

► voir avantages et inconvénients de la communication numérique page 7 du poly.

Modulation (numérique)

(12)

A. Définition: la modulation numérique est très différente de la modulation analogique, c'est le fait de correspondre à un message numérique un signal analogique.

- on distingue 2 types de modulations:

- Modulation en bande de Base
- Modulation d'une portante

* Modulation en bande de Base:

- le modulateur associe un signal sous forme d'une impulsion rectangulaire de durée T et de hauteur $-3, -1, 1, 3 \dots$ donc on obtient alors pendant T une valeur fixe.
- Le spectre de ce signal sera situé autour de la fréquence
- Cette modulation s'appelle MIA (modulation d'impulsions en Amplitude (PAM en anglais))
- Plusieurs codes en ligne existent: (p. 10)
 - code unipolaire $a_k \in \{0; 1\}$
 - code polarisé $a_k \in \{-1; 1\}$
 - code bipolarisé $a_k \in \{0; -1; +1\}$
 - code bipolaire ou Manchester $a_k \in \{-1; +1\}$

$$x(t) = \sum a_k h(t-kT)$$

a_k et $h(t)$ varie de code à un autre

$h(t)$ est un signal rectangle généralement

▷ Pour le bipolaire $h(t) = \begin{cases} A & 0 \leq t < \frac{T}{2} \\ -A & \frac{T}{2} \leq t < T \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$

▷ Notion du RZ et NRZ : retour/non retour à zéro, c'est à dire si l'impulsion dure une fraction de T au lieu de $\frac{1}{2}T$ et T

• pour simplifier, on peut considérer ceci : $a_n + f_3$ de sont H signal H sera :

$$\sum a_k \delta(t - kT) \xrightarrow{H(t)} x(t)$$

dans cette représentation on peut mettre plusieurs filtres et le résultat va être un signal HIA.

K de $a \rightarrow$ un canal
 K de $\infty \rightarrow$ un émetteur

Critères de choix d'un code en ligne:

- ① consommation spectrale
- ② consommation d'énergie
- ③ Synchronisation
- ④ spectre nul autour de 0

(pour les Pairs avec l'eternal Amis)
byesde fabrice and philippe

Avantage du code en ligne:

- ① Tous les codes en ligne correspondent à une modulation HIA.
- ② le filtrage d'un signal HIA, donne un signal HIA.
- Donnée spectrale de puissance des codes en ligne !

$$\sum a_k \delta(t - kT) = y(t)$$

$$x(t) = y(t) * h(t)$$

formule de filtrage donne :

$$S_x(f) = |H(f)|^2 S_y(f)$$

à la fin on obtient

$$S_x(f) = \frac{1}{T} S_{ac} (e^{j2\pi f T}) |H(f)|^2 + \frac{1}{T} \alpha_{nal}^2 \sum_m |H(\frac{m}{T})|^2 \delta(f - \frac{m}{T})$$

MOUVEMENT
DE L'ESIB
DE SOLIDAIRES

5 étapes pour trouver l'expression de la densité spectrale de puissance (13)

E1: Calcul de $m_a = E(a_m) = \sum_{i=1}^M \alpha_i \cdot P(a_m = \alpha_i)$

E2: Calcul de $R_a(K) = \begin{cases} R_a(0) = E[|a_m|^2] = \sum_{i=1}^M |\alpha_i|^2 P(a_m = \alpha_i) \\ |m_a|^2 \quad K \neq 0 \end{cases}$

E3: Calcul de $R_a^c(K) = R_a(K) - |m_a|^2 = T_a^2 \delta(K)$
si $m_a \neq 0$

si $m_a = 0$ $R_a^c(K) = R_a(K) = R_a(0) \quad T_a^2 = R_a(0) - |m_a|^2$

E4: Calcul de $S_a^c(e^{j2\pi f_k T}) = \sum_K R_a^c(K) \cdot e^{-j2\pi f_k K T}$

E5: Calcul de $|H_n(f)|^2 \quad h_n(t) \iff H_n(f)$

• code polarisé NRZ : $S_x(f) = A^2 T \left(\frac{\sin \pi f T}{\pi f T} \right)^2$

• code unipolaire NRZ : $S_x(f) = \frac{1}{16} A^2 T \left(\frac{\sin \pi f T}{\pi f T} \right)^2 + \frac{A^2}{16} \sum_m \left(\frac{\sin \pi m/2}{\pi m/2} \right)^2 \delta(f - \frac{m}{T})$

• code bipolaire : $S_x(f) = A^2 T \cdot \left(\frac{\sin^2 \pi f T/2}{\pi f T/2} \right)^2$

• code bipolaire NRZ : $S_x(f) = \frac{1}{4} A^2 T \sin^2(\pi f T) \left(\frac{\sin \pi f T/2}{\pi f T/2} \right)^2$

Δ $\boxed{S_x^c(f) = \frac{1}{4} S_a^c(e^{j2\pi f T}) |H_n(f)|^2}$

* Modulation sur porteuse :

Comme dans la modulation d'un signal analogique, on multiplie le signal par un $\cos(2\pi f_0 t)$.

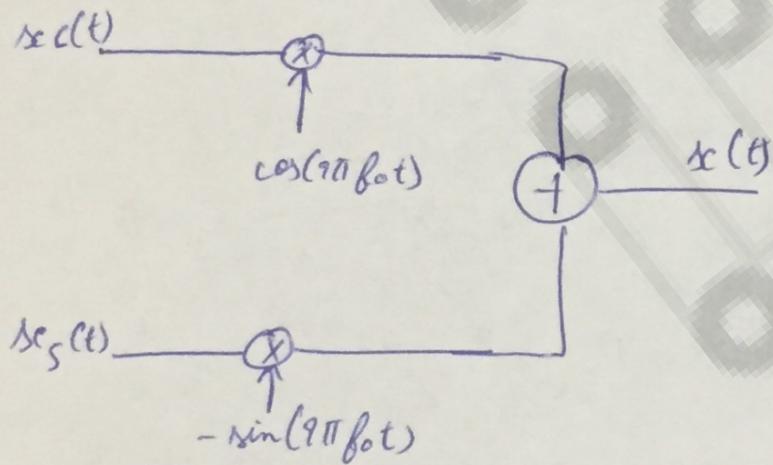
- on a 2 types :
 - modulation linéaire
 - modulation angulaire

- $$x(t) = x_c(t) \cos(2\pi f_0 t) - x_s(t) \sin(2\pi f_0 t)$$

x_c et x_s sont les composantes en phase et quadrature.

on pose
$$x_b = \alpha_x = x_c + j x_s$$
 l'enveloppe complexe

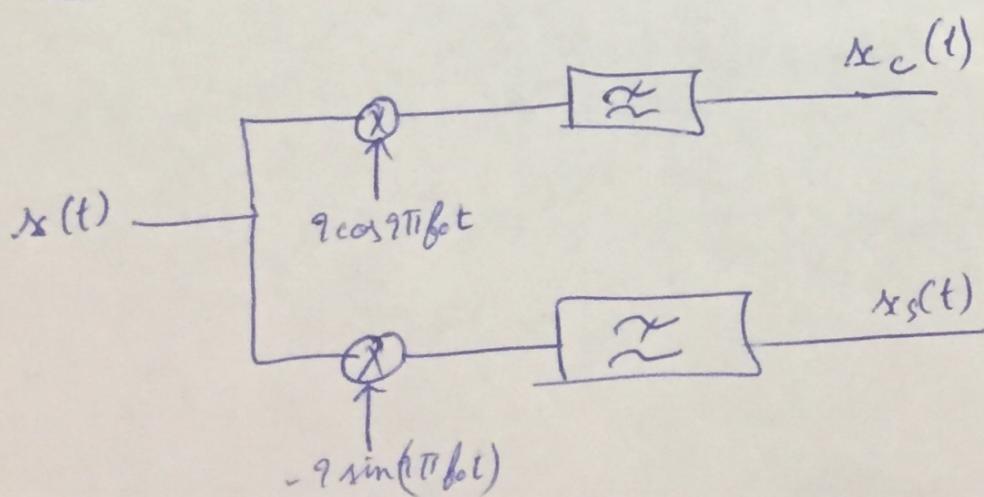
$x_c(t)$ sera = $\text{Re} [x_b(t) e^{j2\pi f_0 t}]$



$$x_c(t) = \sum a_n h_m(t-nT)$$

$$x_s(t) = \sum b_n h'_m(t-nT)$$

Démodulation :



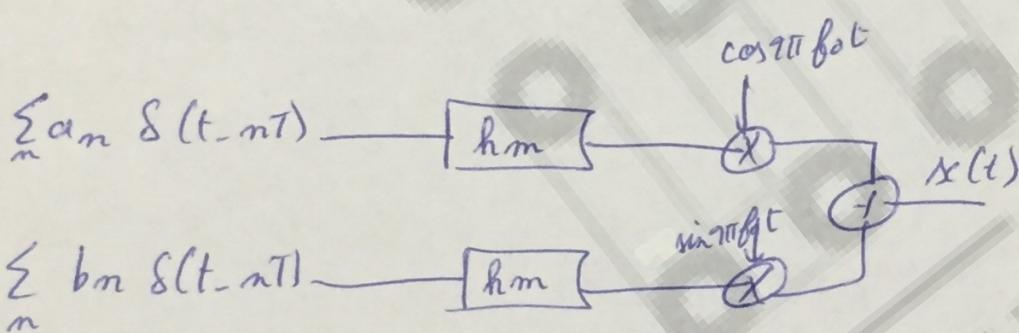
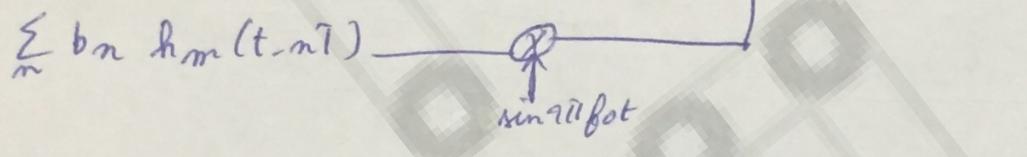
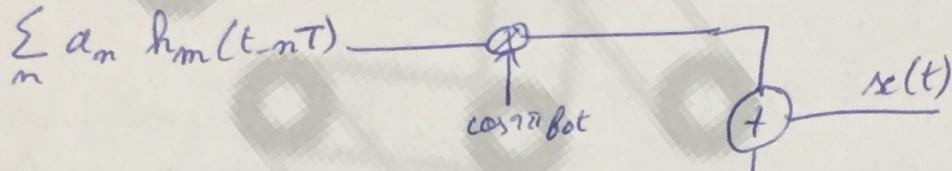
MOUVEMENT
DE L'ESIE
SOLIDAIRES

* Pour la modulation linéaire on a :

- MAQ : modulation d'amplitude en quadrature
- MDP : modulation par déplacement de phase
- MSK : minimum shift Keying
- ASK : modulation monodimensionnelle

MAQ

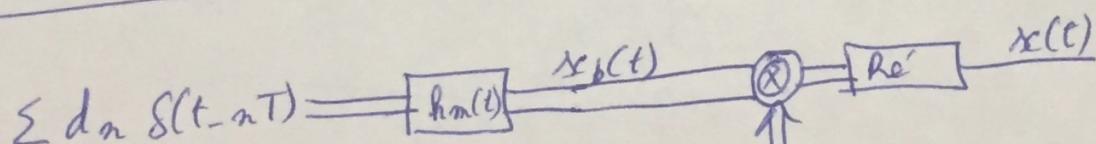
on peut parler de MAQ seulement si $h_m = h'_m$



$$x_b(t) = x_c + jx_s = \sum_n (a_n + jb_n) h_m(t-nT)$$

sait $[d_n = a_n + jb_n]$ MIA mais complexe.

forme simplifiée :



$$S_{x_b}(f) = \frac{1}{T} S_d (e^{j2\pi f t}) |H_m(f)|^2$$

$$S_x(f) = \frac{1}{a} [S_{x_b}(f-f_0) + S_{x_b}(f+f_0)]$$

$a_n \in \{-\}$ de cardinal M_a , M_b
et $b_n \in \{-\}$

$d_n \in \{-\}$ de card $M \rightarrow \text{MAQ}-M$

au cours de la transmission, 1 bit est transmit par a_n puis l'autre par b_n et ainsi de suite

• Constellation rectangulaire : MAQ-M

C'est une représentation du signal MAQ-M dans le plan des réels et imaginaires c.à.d représentation des a_n et b_n

on a toujours intérêt à conserver une distance fixe entre les points $d=2$ et que tous les points soient proches de l'origine
la meilleure situation est de prendre
Algorithme à suivre :

$$[M_a = M_b = \sqrt{M}]$$

① - MAQ-M on cherche $N \geq M / N = (2p)^2$ ($2p$ pour avoir \sqrt{N} pair)

② - MAQ-N avec $a_n \in \{\pm 1; \pm 3; \dots; \pm \sqrt{N}-1\}$
 $b_n \in \{\pm 1; \pm 3; \dots; \pm \sqrt{N}-1\}$

③ - on élimine $N-M$ point les plus loin.

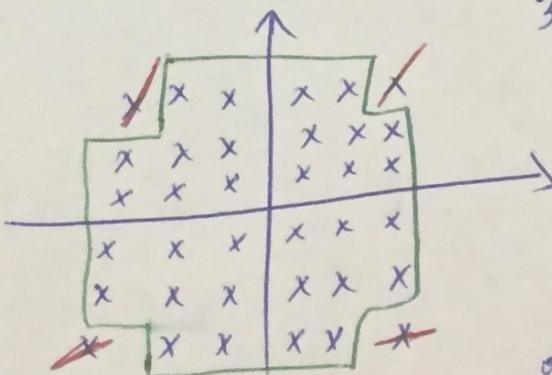
⚠ dans le cas où $M = (2p)^2$ on va obtenir un carré de points, les coins sont très loin, on essaie de les rapprocher généralement on les place sur les axes de façon à avoir $d=2$ avec les points les plus proche.

Ex: MAQ-32

$$N = 36 = (2 \times 3)^2$$

$$\sqrt{N} = 6$$

$$a_n \in \{\pm 1; \pm 3; \pm 5\}$$



$$36 - 32 = 4$$

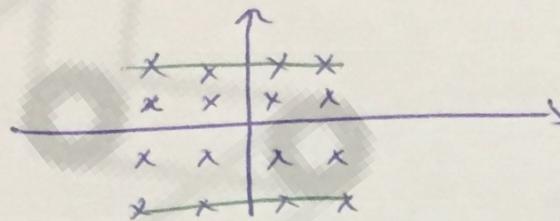
on élimine 4

$$d_n \in \{-\}$$

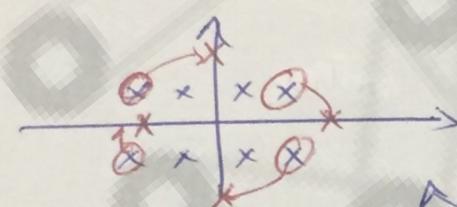
on peut faire un
étiquetage de Gray

$$N=16 = (2 \times 2)^2$$

$$\sqrt{N}=4 \Rightarrow \frac{d_n}{b_m} \in \{-1; \pm 3\}$$



on doit éliminer 8 points
on peut choisir entre les points
à condition qu'ils soient très
loin



$$d_n \in \{\pm 1 \pm j; \pm 3 \pm j\}$$

$$d_n \in \left\{ \pm 1 \pm j; \pm 1 + \sqrt{3}; \pm 1 - \sqrt{3}; \pm j(1 + \sqrt{3}); \pm j(1 - \sqrt{3}) \right\}$$

on calcule généralement $E[|d_n|^2] = \sum \{ \alpha_i \}^2 P(d_n = \alpha_i)$

celui qui a $E[|d_n|^2]$ facile est meilleur. car $\chi = \frac{d_{\min}^2}{E[|d_n|^2]}$

$$E[|d_n|^2] = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{M-1} (\alpha_i^2 + b_i^2) \quad \text{il faut que } \chi \gg E[|d_n|^2]$$

MDP

$$h_m(t) = \begin{cases} A & 0 \leq t < T \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

dans cette modulation on travaille sur la phase

$$d_n = e^{j\phi_k} \rightarrow \boxed{\text{constellation circulaire}}$$

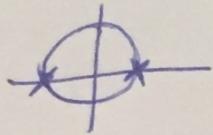
on a donc toujours $|d_n|=1 \rightarrow E[|d_n|^2] = 1$

MDP-M

donc on a $d_n \in \{ \cdot \}^M$ de card M

$\phi_k \in \{ \cdot \}^M$ de card M

MDP-Q



MDP4



$$x_b = \sum_k R_k h_m(t - kT) = A d(k) = A \delta(\phi_k)$$

$$|x_b| = A$$

$$x_c(t) = \operatorname{Re} [x_b(t) e^{j2\pi f_0 t}] = \operatorname{Re} [A e^{j2\pi f_0 t} e^{j\phi_k}]$$

$$x_c(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \phi_k)$$

Calcul de $S_{x_b}(f)$:

$$\bullet S_{x_b}(f) = \frac{1}{T} S_d(e^{j2\pi f T}) |H_m(f)|^2$$

$$S_d(e^{j2\pi f T}) = \sum R_d(k) e^{-j2\pi f k T}$$

d_k entiers et non corréles

$$R_d(e^{j2\pi f T}) = R_d(0)$$

$$S_{x_b}(f) = \frac{1}{T} R_d(0) |H_m(f)|^2$$

$$R_d(0) = \sum (\alpha_i)^2 P(d_i = \alpha_i) = E[|d_i|^2]$$

Pour MAQ : on calcule $R_d(0)$

Pour MDP : $R_d(0) = 1$

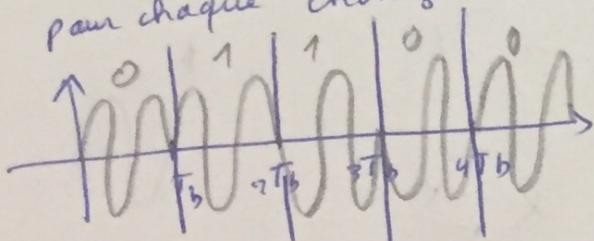
$$S_x(f) = \frac{1}{4} \left[S_{x_b}(f - f_0) + S_{x_b}(\bar{f} + f_0) \right]$$

- bâti à la symétrie

Représentation de MDP-2 (BPSK)

pour chaque changement de bits, on change le sens du signal

$$x_c(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \phi_k)$$



MAQ par rapport à MDP

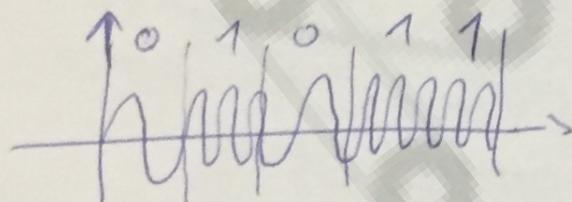
76

- avantages:
- ① meilleur performance
 - ② bande spectrale plus limitée

- inconvénients:
- ① MDP résiste aux distorsion non-linéaire
enveloppe complexe à module constant $|d_{nl}| = 1$
 - ② MDP plus simple à réaliser.

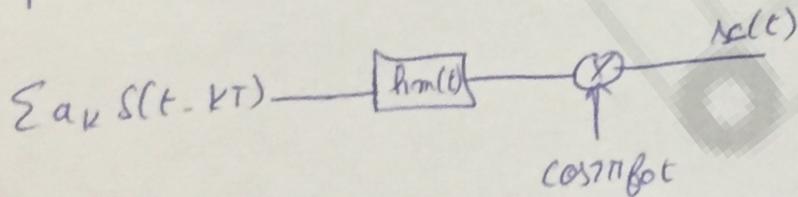
FSK : Fast Shift Keying:

FSK-2 = BFSK on associe pour le 0 une fréquence faible et pour le 1 une fréquence importante



ASK ou monodimensionnelle:

pas de b/c



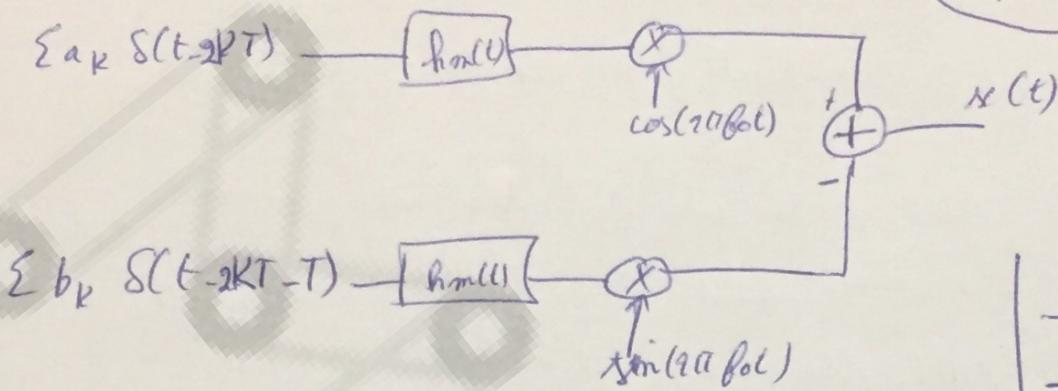
constellation: les $a_k \in \mathbb{R}$ plus on augmente M

plus $E[|a_k|^2] \nearrow \Rightarrow \nearrow M$ → ASK-2 seulement

Généralement on utilise

MODULATION
MONODIMENSIONNELLE

MSK : Minimum shift Keying :



$$\frac{a_k}{b_k} \in \{-1\}$$

avec $R_m(t) = \begin{cases} A \cos\left(\frac{\pi t}{T}\right) & -T \leq t < T \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$

* Modulation angulaire :

- Modulation par déplacement de fréquence (FSK)

(MDF) ou (FSK)

$$a_n \in \{ \pm 1, \dots, I(M-1) \}$$

on fait varier la fréquence selon les a_n

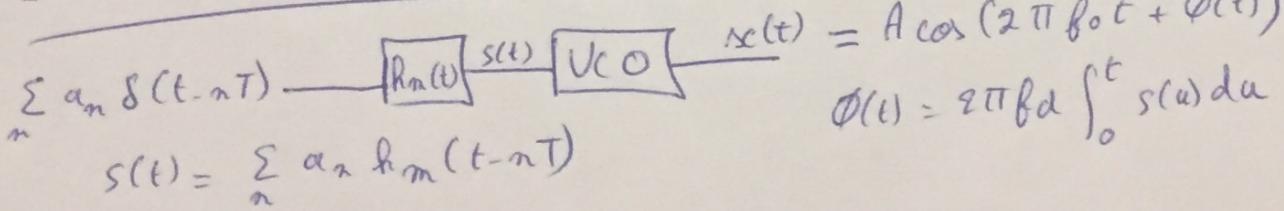
$$x(t) = A \cos \left[2\pi(f_0 + a_n \frac{\Delta f}{2})t \right]$$

ici on a un problème de discontinuité lorsque la fréquence change

(voir schéma p. 30)

voir la forme de $x(t)$ avec R FSK.

- Modulation à phase continue :



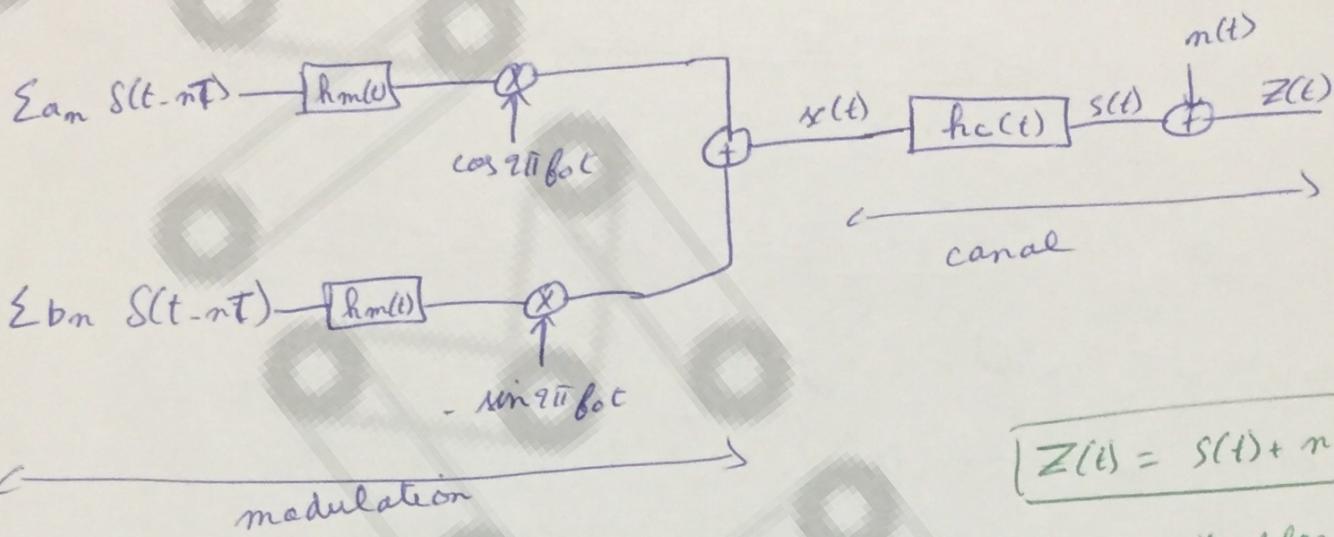
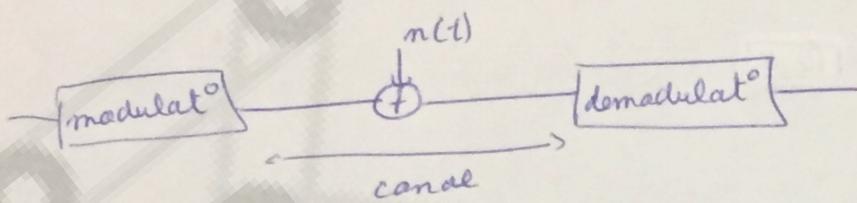
Avantages :

- la simplicité
- possibilité d'une démodulation non cohérente
- résistances aux distorsions non-linéaires

Démodulation

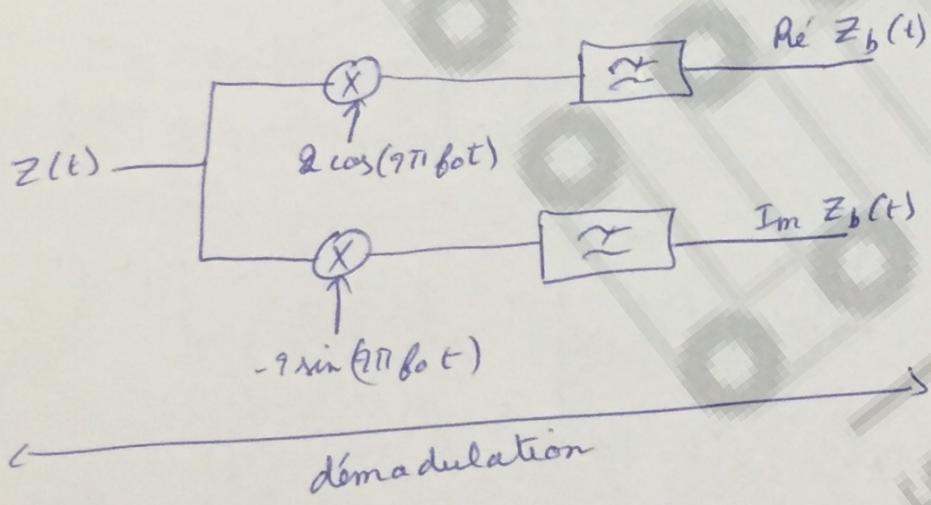
(17)

Modélisation



$$Z(t) = s(t) + n(t)$$

\underline{n} : bruit, blanc, gaussien, centré
 $DSP = \frac{N_0}{2}$



$\Delta s(t) = \text{Ré}(S_b(t) \cdot e^{j2πf_b t})$ avec S_b le signal équivalent en bande de base.

de même $n(t) = \text{Ré}(n_b(t) \cdot e^{j2πf_b t})$

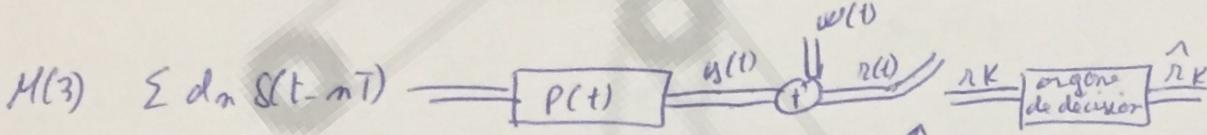
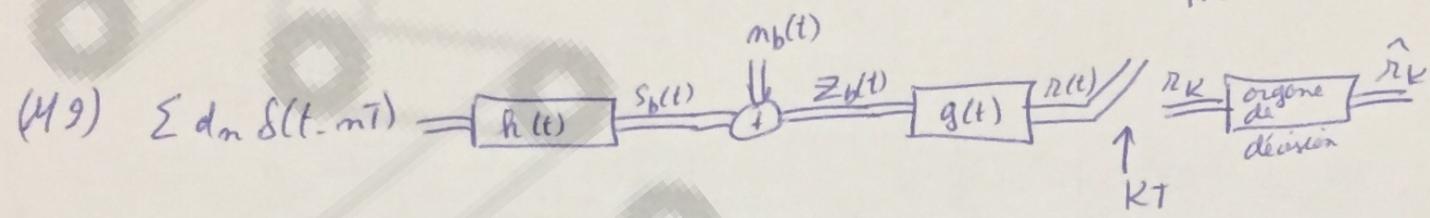
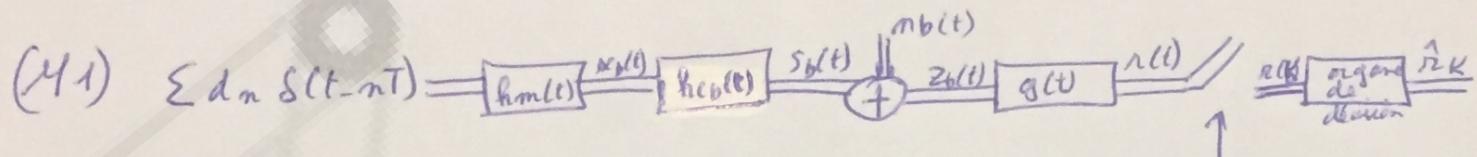
$$z(t) = \text{Ré}(Z_b(t) \cdot e^{j2πf_b t})$$

b indique l'équivalence en bande de base.

- * toujours pour étudier n'importe quel système, on a besoin de faire un modèle mathématique qui nous facilite notre étude. Dans notre cas, le meilleur modèle c'est le modèle équivalent en bande de base.

2- Modèle équivalent en bande de base.

on a 3 modèles à évoquer dont 2 dérivent du premier :



* $h_{cb}(t) \Leftrightarrow H_{cb}(f) = H_c^+(f + f_0)$

* $h(t) = h_m(t) * h_{cb}(t)$

* $p(t) = h(t) * g(t) = h_m(t) * h_{cb}(t) * g(t)$

* généralement, pour être dans le domaine causal et pour compenser le délai dû à une grande distance l'échantillonnage doit se faire à $KT + A$. Mais, cette constante A ne va rien changer sur les calculs et les résultats. Donc on ne la met pas.

* $S_v(f) = |G(f)|^2 \cdot S_{nb}(f) = 2N_0 |G(f)|^2$

* $T_w^2 = 2N_0 \int_{-\infty}^{+\infty} |G(f)|^2 df$

$T^2 = \frac{1}{2} T_w^2 = N_0 \int_{-\infty}^{+\infty} |G(f)|^2 df$

* Une étude est faite pour trouver $g(t)$ pour lequel on a le minimum d'erreur, on a eu : $g(t) = h(-t)^*$

alors $p(t) = h(t) * h(-t)^*$

$P(f) = |H(f)|^2$

$$z_b(t) = \sum_n d_n s(t-nT) + n_b(t)$$

$$x(t) = y(t) + w(t)$$

$$y(t) = \sum_n d_n p(t-nT)$$

Δ lors de la décision, plusieurs facteurs entrent en jeu : l'interférence entre composante en phase et en quadrature malie diaphonie et l'effet du bruit, interférence entre symboles.

3- Diaphonie.

on étudie la diaphonie en considérant que le bruit n'existe pas.

$$\sum_n d_n s(t-nT) \xrightarrow{h_m(t)} x_b(t) \xrightarrow{h_{cb}(t)} s_b(t) \xrightarrow{g(t)} y(t)$$

$$H_{cb}(f) = H_c^+(f+f_0)$$

$$\sum_n d_n s(t-nT) \xrightarrow{P(t)} y(t)$$

$$p(t) = h_m(t) * h_{cb}(t) * g(t)$$

$h_{cb}(t)$ est un filtre linéaire, il peut être réel si on a une symétrie de la réponse du filtre, et il peut être complexe, c'est le cas de la non-symétrie.

Si $H_{cb}(f)$ non symétrique \Rightarrow diaphonie

h_{cb} complexe $\Rightarrow h(t)$ complexe
 $g(t)$ "
 $p(t)$ "

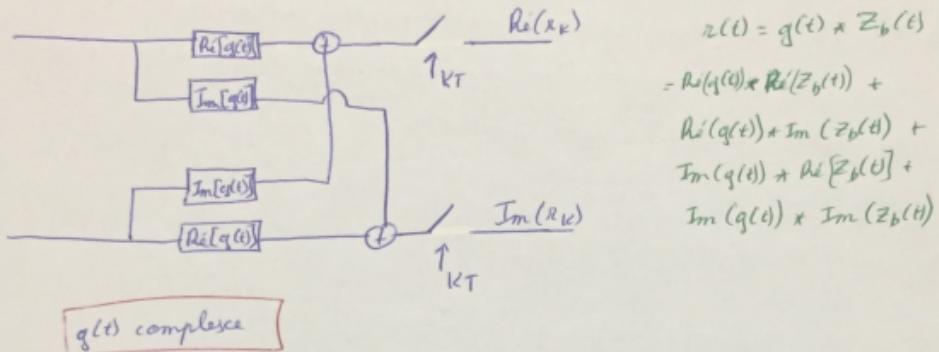
$$\text{alors } p(t) = \text{R}\delta(p(t)) + j\text{Im}(p(t))$$

$$q = \sum_n d_n p(t-nT) = \sum (a_n + j b_n) (\text{R}\delta(p(t-nT)) + j\text{Im}(p(t-nT)))$$

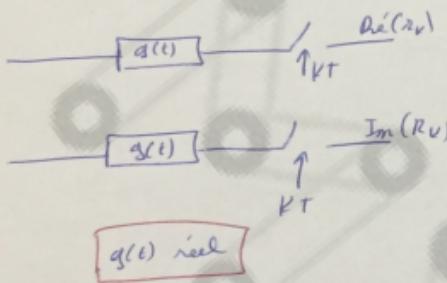
$$\text{Re}[q(t)] = \sum_n a_n \text{Re}[p(t-nT)] - \sum_n b_n \text{Im}[p(t-nT)]$$

$$\text{Im}[q(t)] = \sum_n b_n \text{Re}[p(t-nT)] + \sum_n a_n \text{Im}[p(t-nT)]$$

Structure du démodulateur



si q(t) est réel



⚠ si $d_{kP}(t)$ réel alors
q(t) réel et p(t) réel

⚠ Chaque modulation HAQ-M ($M = 2^L$) est équivalente à 2 modulations ASK- \sqrt{M}

4- Interférence entre symboles: IES.

$$q(t) = \sum_n d_n p(t-nT)$$

$$q(t) = d_K p(t-KT) + \sum_{n \neq K} d_n p(t-nT)$$

↑ symbole
d'indice K

↑ perturbation

$$t \in [KT, KT+T]$$

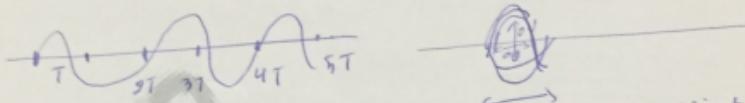
$$\operatorname{Re}[q(t)] = a_K \operatorname{Re}[p(t-KT)] + \underbrace{\sum_{m \neq K} a_m \operatorname{Re}[p(t-mT)] - \sum_{m \neq K} b_m \operatorname{Im}[p(t-mT)]}_{\text{IES.}}$$

(19)

Pour le cas où $T > T_0$ T durée entre symboles
 pas d'IES T_0 support temporel de l'impulsion filtrée.

Diagramme de l'œil :

on choisit un intervalle de longueur T et on trace tous les morceaux de $q(t)$ superposés, chaque morceau de longueur T



OH : est l'ouverture horizontale nécessaire pour saisir l'instant d'échantillonnage

OV : ouverture verticale, marge laissée au bruit

$$\text{ASK-M: } \operatorname{Re}[q(t)] = a_K \operatorname{Re}[p(t-KT)] + \sum_{m \neq K} a_m \operatorname{Re}[p(t-mT)]$$

$$\boxed{\frac{OV}{2} = \operatorname{Re}[q(KT)] \quad \text{pour IES} = \operatorname{Re}[p(0)] + \sum_{m=K+1}^M \sum_{n=K}^m \operatorname{Re}[p(KT-nT)]}$$

$$\text{MAG-M: } \operatorname{Re}[q(t)] = a_K \operatorname{Re}[p(t-KT)] + \sum_{m \neq K} a_m \operatorname{Re}[p(t-mT)] - \sum_{m \neq K} b_m \operatorname{Im}[p(t-mT)]$$

$$\boxed{\frac{OV}{2} = \operatorname{Re}[q(KT)] \quad \text{pour IES} = \operatorname{Re}[p(0)] - (\sqrt{H-1}) \sum_{m=K+1}^M \operatorname{Re}[p(KT-mT)] - (\sqrt{H-1}) \sum_{m=K+1}^M \operatorname{Im}[p(KT-mT)]}$$

Nombre de yeux :

ASK-M	MAG-M
$H-1$	\sqrt{H}

Canal de Nyquist:

Si le canal est un canal de Nyquist alors on n'a pas d'IES.
 $p(n\tau)$ a la forme suivante :

$$p(n\tau) = \begin{cases} p(0) & n=0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases} \quad (p(0) \text{ réel}) \quad \text{on a alors une onde avec les ouvertures maximales}$$

condition de Nyquist du domaine fréquentiel

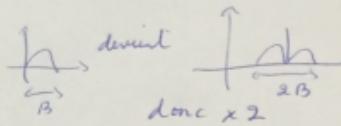
$$p(0) = \frac{1}{T} \sum_m p(f - \frac{m\tau}{T})$$

Δ le canal de Nyquist provient des fonctions cosinus surélevées.
 $p(f) \geq p(f)$. cos surélevé

* 3 résultats importants :

$$\textcircled{1} \quad B_{\min} = \frac{1}{2T} \quad (\text{en Bande de Base})$$

$$B_{\min} = \frac{1}{2T} \quad \text{sur portée}$$



$$\textcircled{2} \quad 0 < f < \frac{1}{2T}$$

$$\text{on a } p(0)T = p(f) + p(f - \frac{1}{T})$$

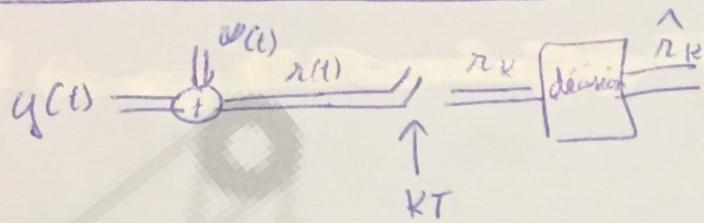
$$\textcircled{3} \quad \text{condition de Nyquist vérifiée si } A\left(\frac{1}{2T}; \frac{p(0)T}{2}\right)$$

Δ si on a mentionné le facteur de débordement

$$\text{alors } B = \frac{1+\alpha}{2T} \quad \text{Déb} = \frac{\alpha}{2T}$$

Décision en présence de Bruit:

(20)



$$\text{ré}(n_k) = a_k p(0) + \text{ré}(w_k) \quad (\text{on suppose qu'on a un canal de N qubits})$$

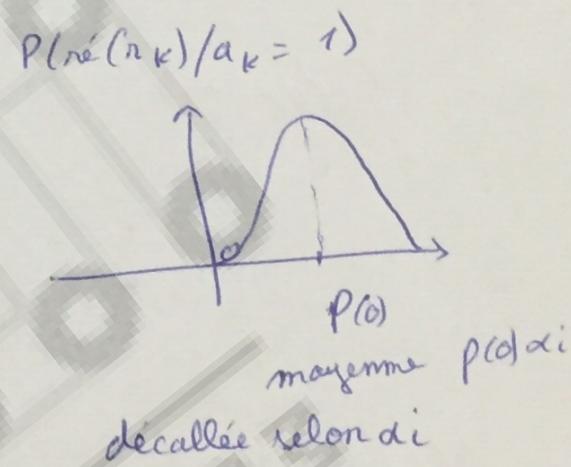
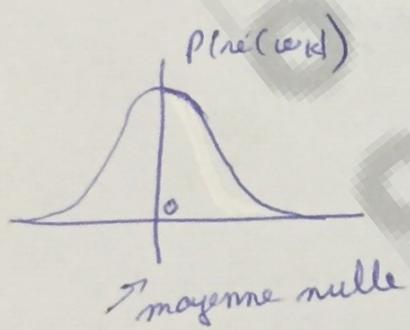
$$\text{Im}(n_k) = b_{12} p(0) + \text{Im}(w_k)$$

la variable de décision $\text{ré}(n_k)$ est gaussienne de moyenne $p(0)\alpha_i$

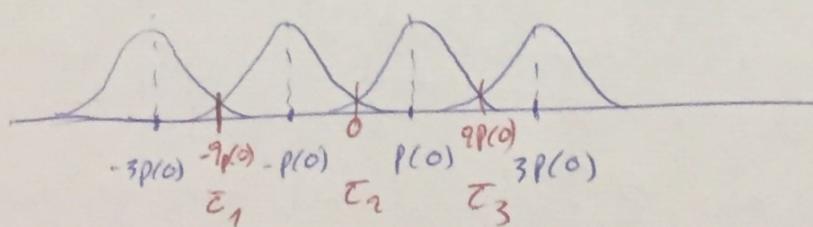
et de variance σ^2 (la variance de $\text{ré}(w_k)$)

$$P(\text{ré}(n_k)/a_k = \alpha_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(\text{ré}(n_k) - p(0)\alpha_i)^2}$$

$\text{ré}(w_k)$ est aussi gaussienne



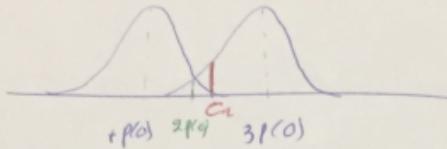
si on a une équiprobabilité entre les symboles, ce n'est pas un problème, on va alors obtenir $\tau_i = \dots -2p(0); 0, 2p(0) \dots$



si on n'a pas une équiprobabilité, les τ_i seront différents des milieux des segments τ_i sera plus proche d'un symbole que d'un autre. On peut trouver τ_i à l'aide du critère de max de vraisemblance

$$\tau_i = \frac{1}{2p(\alpha)} \ln \left(\frac{p(\alpha_i)}{p(\alpha_K)} \right) \rightarrow$$

fini n'iba mon avra la
formule aleel bar hauk avra la
la resolution de l'équation va
aboutir à ce resultat.



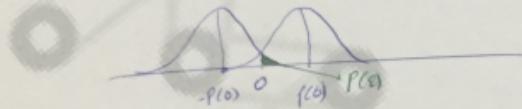
$$\hat{\alpha}_K = \alpha_i \quad \text{ssi } \text{ré}(\alpha_i) < t_2$$

$$\hat{\alpha}_K = \alpha_K \quad \text{ssi } \text{ré}(\alpha_K) > t_2$$

Calcul de la probabilité d'erreur :

$P(\varepsilon) = \frac{1}{M} P_i(\varepsilon)$: c'est la moyenne des probabilités d'erreur partielles

$$P_i(\varepsilon) = P(\varepsilon / \alpha_K = \alpha_i) = P(\hat{\alpha}_K = \alpha_i / \alpha_K = \alpha_i)$$



$$P(\varepsilon / \alpha_K = -1) = P(\hat{\alpha}_K = 1 / \alpha_K = -1)$$

$$= P(\text{ré}(\alpha_K) > 0 / \alpha_K = -1)$$

$$= P(-p(0) + p(\text{ré}(\alpha_K)) > 0)$$

$$P(\varepsilon / \alpha_K = -1) = P(\text{ré}(\alpha_K) > p(0))$$

dans le cas non équiprobable on a

$$> \tau_i$$

cas équiprobable
 τ_i donné $-2p(0) > 0$
 $2p(0) \dots$

$$P(\varepsilon / \alpha_K = -1) = Q\left(\frac{p(0)}{\sqrt{T}}\right) \quad \text{avec } Q \text{ une fonction donnée}$$

$$P(\varepsilon / \alpha_K = 1) = P(\text{ré}(\alpha_K) < 0 / \alpha_K = 1) \\ = P(\text{ré}(\alpha_K) < p(0))$$

$$P(\varepsilon / \alpha_K = 1) = P(-\text{ré}(\alpha_K) > p(0)) = Q\left(\frac{p(0)}{\sqrt{T}}\right)$$

De la même façon on peut trouver les différentes formes de probabilité d'erreur pour les différentes modulations (27)

Forme générale :

$$P(\varepsilon) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M P(\varepsilon | a_K = \alpha_i) \quad (P(\varepsilon) \text{ sur les symboles})$$

ASK-2 MSK-BPSK-HIA

$$P(\varepsilon) = Q\left(\frac{P(c)}{\sqrt{T}}\right)$$

ASK-M

$$P(\varepsilon) = \frac{2(M-1)}{M} Q\left(\frac{P(c)}{\sqrt{T}}\right)$$

MSK-M: $M = 2^{2L}$

$$P(\varepsilon) = \frac{2(\sqrt{4}-1)}{\sqrt{4}} Q\left(\frac{P(c)}{\sqrt{T}}\right) \quad (\text{pour les } a_K \text{ et } b_K)$$

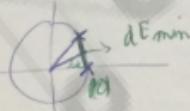
$$P(\varepsilon) = P_{a_K \cup b_K} = P_{a_K} + P_{b_K} - P_{a_K \cap b_K} \quad \text{négligeable}$$

$$P(\varepsilon) = \frac{4(\sqrt{4}-1)}{\sqrt{4}} Q\left(\frac{P(c)}{\sqrt{T}}\right)$$

on va introduire une autre forme de $P(\varepsilon)$

$$P(\varepsilon) = N_r \cdot Q\left(\frac{dE_{min}}{\sqrt{T}}\right) \quad \text{avec } N_r = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M N_i$$

MDP-M $M > 4$



$$\begin{aligned} \frac{dE_{min}}{\sqrt{T}} &= P(c) \sin \alpha \\ &= P(c) \sin \left(\frac{\pi}{M} \right) \end{aligned}$$

$$P(\varepsilon) = 2 \cdot Q\left(\frac{P(c) \sin \frac{\pi}{M}}{\sqrt{T}}\right)$$

N_r : nombre de récepteurs à une distance dE_{min}

Filtre adapté: filtre qui minimise $P(\varepsilon)$

$$g(t) = ? / \frac{P(0)}{\tau} \text{ minimal}$$

$$P(0) = p(t=0)$$

$$p(t) = h(t) * g(t) \implies P(f) = H(f) \cdot G(f)$$

$$p(t=0) = p(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(f) df$$

$$P(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} H(f) G(f) df$$

$$\tau^2 = N_0 \int_{-\infty}^{+\infty} |h(f)|^2 df$$

$$\frac{P(0)^2}{\tau^2} = \frac{\left(\int_{-\infty}^{+\infty} H(f) G(f) df \right)^2}{N_0 \int_{-\infty}^{+\infty} |h(f)|^2 df}$$

inégalité de Schwartz

$$\frac{P(0)^2}{\tau^2} \leq \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} |H(f)|^2 df \int_{-\infty}^{+\infty} |G(f)|^2 df}{N_0 \int_{-\infty}^{+\infty} |h(f)|^2 df}$$

on a égalité si $G(f) = \alpha |H(f)|^*$ $\implies g(t) = h^*(t)$

$$\implies \frac{P(0)^2}{\tau^2} = \frac{1}{N_0} \int_{-\infty}^{+\infty} |H(f)|^2 df$$

$$\boxed{P(f) = H(f) \cdot G(f) = |H(f)|^2}$$

$$\implies \frac{P(0)^2}{\tau^2} = \frac{1}{N_0} \int_{-\infty}^{+\infty} P(f) df$$

$$\text{d'où } \boxed{\frac{P(0)^2}{\tau^2} = \frac{P(0)}{N_0}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} G(f) &= H(f)^* \\ g(t) &= h^*(t) \end{aligned}}$$

donc on remplace $\frac{P(0)}{\tau^2}$ par $\sqrt{\frac{P(0)}{N_0}}$ dans les équations d'orsont

Quoi faire dans les exercices ?

$$\text{ASK-2} \longrightarrow P(\varepsilon) = Q\left(\frac{P_{\text{col}}}{T}\right)$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad T^2 &= N_0 \int_{-\infty}^{+\infty} |g(f)|^2 df \quad \text{avec } |g(f)|^2 = |H(f)|^2 = P(f) \\ \text{canal de Nyquist} \quad T &= N_0 \int_{-\infty}^{+\infty} P(f) df \Rightarrow N_0 P_{\text{col}} = T^2 \\ &\Rightarrow P(\varepsilon) = Q\left(\sqrt{\frac{P_{\text{col}}}{T^2}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{P_{\text{col}}}{N_0}}\right) \end{aligned}$$

$$\bullet \quad P(\varepsilon) = Q\left(\sqrt{\frac{P_{\text{col}}}{T^2}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{P_{\text{col}}}{N_0}}\right)$$

(calcul de $P(\varepsilon)$ en fait de $\frac{E_b}{N_0}$)

$$P_{\text{col}} = 2 E_b \log_2 (M) \cdot \frac{1}{E[K_m^2]}$$

la démonstration
faite en classe

Les expressions finales des $P(\varepsilon)$ seront :

ASK-2, MIA, BPSK, MSK

$$P(\varepsilon) = Q\left(\sqrt{\frac{P_{\text{col}}}{N_0}}\right)$$

ASK-M

$$P(\varepsilon) = \frac{Q(M-1)}{M} Q\left(\sqrt{\frac{2 E_b}{N_0} \log_2 M \cdot \frac{3}{M-1}}\right) \quad E[K_m^2] = \frac{M^2 - 1}{3}$$

MAM-M $M \geq 4$

$$P(\varepsilon) = \frac{4(\sqrt{4}-1)}{\sqrt{4}} Q\left(\sqrt{\frac{2 E_b}{N_0} \log_2 4 \cdot \frac{3}{M-1}}\right)$$

MDP-M $M \geq 4$

$$P(\varepsilon) = 2 Q\left(\sqrt{\frac{2 E_b}{N_0} \log_2 M \sin^2\left(\frac{\pi}{M}\right)}\right)$$

$$P(E) = \frac{1}{\log_2(M)} P(e)$$

ex: $P(E) = 10^{-5}$ → sur chaque 10^5 symboles il y a 1 érreur

$$10^5 \text{ sym} = 10^5 \times \log_2(4) \text{ bits} = 1 \text{ binaire}$$

⚠ Pour les exercices de calcul de $P(E)$, on nous donne un graphe dans lequel on a tracé $G(x)$ avec 3 approximations :

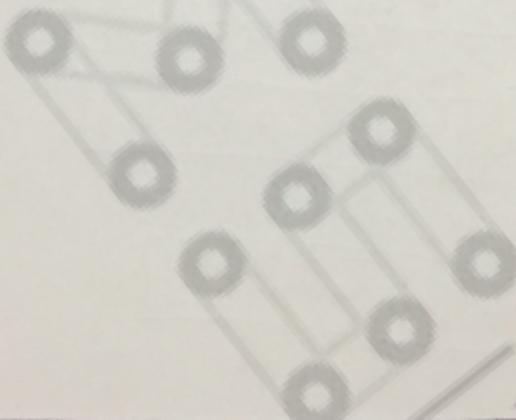
$$\frac{1}{\sqrt{\pi x}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad \text{si on a } \frac{E_b}{N_0} \text{ pour calculer } P(E)$$

$$\frac{1}{2} e^{-\frac{3x^2}{2}} \quad \text{si on a } P(E) \text{ pour tracer } \frac{E_b}{N_0}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi x}} \left(1 - \frac{1}{3x}\right) e^{-\frac{x^2}{2}} \quad : \text{on ne l'utilise pas}$$

⚠ Dégradation en dB entre les modulations c'est l'écart entre les courbes pour une $P(E)$ donnée.

$G(x)$ est une fonction à dérivée rapide donc $dG(x)$ se comporte comme $G(x)$



Egalisation

23

- on a plusieurs types d'égaliseurs :
 - linéaire
 - Non linéaire.
- Egaliseurs linéaires : - forçage à zéro, infini
 - forçage à zéro, fini
- Egaliseurs non linéaires : - Forçage à zéro : $ZFE - DFE$
 minimisant l'EQM : $HSE - DFE$ (ou $HMSE - LE$)

* Le principe c'est d'ajouter un filtre à la réception pour augmenter les performances et avoir une décision plus précise.

* Dans ce chapitre on passe au modèle discret donc on utilise la transformée en Z alors

$$P(B) = H(B) \cdot H^*(B)$$

$$P(Z) = H(Z) \cdot H^*\left(\frac{1}{Z^*}\right)$$

$$y(nT) = \sum_n d_n P(t - nT)$$

$$y_K = \sum_n P_n d_{K-n}$$

convolution discrète.

$$\text{avec } S_{KK}(Z) = 2N_0 P(Z)$$

▷ Dans les exercices, on nous donne $P(z)$ ou $H(z)$, on peut alors tirer ce qui n'est pas donné par $P(z) = H(z) \cdot H^*\left(\frac{1}{z^*}\right)$

▷ $P(\varepsilon)$ dépend des IES, on doit séparer entre les différentes IES.

$$\text{avec égaliseur: } P(z) = N_0 \cdot Q\left(\frac{dE_{\min}}{P}\right)$$

$$S_V(z) = \frac{1}{H(z)} \cdot \frac{1}{H^*(\frac{1}{z^*})} \cdot S_n(z)$$

$$S_V(z) = \frac{2N_0}{P(z)}$$

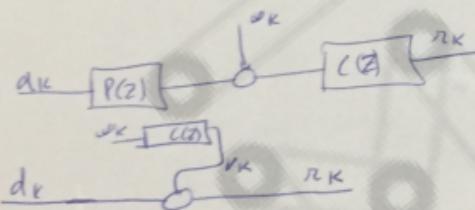
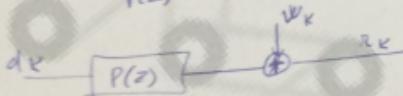
$$R_V(k) = \frac{1}{2\pi j} \oint S_V(z) \cdot z^k dz$$

$$\tau_v^k = R_V(k) = \frac{1}{2\pi j} \oint \frac{S_V(z)}{z} dz = \underline{\underline{\sum p_m}}$$

$$\tau^2 = \sum \tau_k^2$$

* Egaliseur linéaire ZF-LÉ (infini)

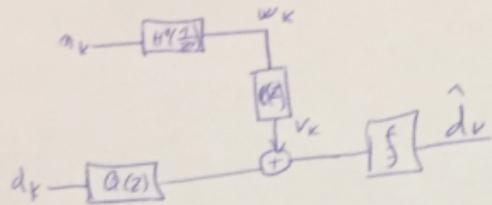
$$C(z) = \frac{1}{P(z)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^{-n}$$



* Egaliseur linéaire ZF-LÉ fini

$$\text{même chose mais } C(z) = \frac{1}{P(z)} = \sum_{n=-N}^N c_n z^{-n}$$

$$\text{on obtient } Q(z) = P(z) \cdot C(z)$$



(24)

$$\pi_K = q_0 d_K + \sum_{\substack{n \\ n \neq K}} q_n d_{K-n} + v_K \rightarrow T_V = \sum P_{Kj}$$

$$T^2 = \frac{1}{2} T_V^2$$

comment trouver les c_n et les q_n ??

on a $Q(z) = \sum_{n=-M}^M q_n z^{-n}$

généralement on a $M=2$

$$\text{d'où } n=0 \quad q_0 = 1 = \sum_{i=-1}^1 c_i p_{-i} = A$$

$$n=1 \quad q_1 = 0 = \sum_{i=-1}^1 c_i p_{1-i} = B$$

on obtient 2 équations à 2 inconnues

on tire alors les c_n

puis $Q(z) = C(z) \cdot P(z) \Rightarrow$ on tire les q_m

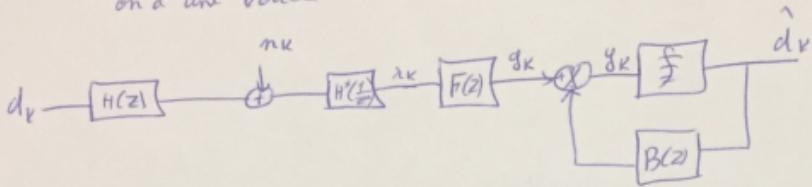
$$\frac{QV}{2} = q_0 - \sum_{i>0} |c_i|$$

$$P(\varepsilon) = N_0 \cdot Q\left(\frac{dE_{min}}{N_0}\right) = N_0 \cdot \sigma \left(\sqrt{\frac{p(z)}{T^2}} \right)$$

avec T^2 calculé à partir de $T_V^2 = \sum P_{Kj}$ et $T^2 = \frac{1}{2} T_V^2$

Egaliseur non linéaire : ZF - DFE

on a une boucle de retour :



$$H(z) = \sum_{n=0}^L h_n z^{-n}$$

$$H'(\frac{1}{z}) = \sum_{n=0}^L h_n z^n$$

$$F(z) = \frac{1}{H'(\frac{1}{z})} \Rightarrow g_k = \sum_{n=0}^L h_n d_{k-n} + m_k$$

$$B(z) = H(z) - h_0$$

$$\Rightarrow y_k = h_0 d_k + h_1 (d_{k-1} - \hat{d}_{k-1}) + m_k$$

$$P(\varepsilon) = N_0 Q\left(\frac{d_{\text{min}}}{2T}\right) = N_0 Q\left(\frac{2h_0}{2T}\right) = N_0 Q\left(\sqrt{\frac{h_0^2}{T^2}}\right)$$

avec $T^2 = N_0 P_G$

* Egaliseur MSE-DFE :

$$H(z) = \sum_{n=0}^L h_n z^{-n}$$

$$F(z) = \sum_{n=0}^{N_f} f_n z^{-n}$$

$$B(z) = \sum_{n=-1}^L b_n z^n$$

le modèle est le même d'avant ↑

$$\text{on a } EQH = E[(y_k - d_k)^2]$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial EQH}{\partial b_i} &= 0 \\ \text{et } \frac{\partial EQH}{\partial f_i} &= 0 \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \text{et on trouve} \\ \text{alors les} \\ \text{coefficients.} \end{array} \right.$$