Techniques Mathématiques.

Chapitre I : Analyse Complexe

. Analyse Réelle

$\begin{cases} f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} & \text{fct° réelle à variable réelle} \\ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} & \text{fct complexe à variable réelle} \end{cases}$

Analyse Complexe.

$\begin{cases} f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R} & \text{fct° réelle à variable complexe.} \\ f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} & \text{fct° complexe à variable complexe.} \end{cases}$

Forme algébrique d'un nombre complexe.

$z = (x, y) = x + iy$ avec $Re(z) = x$ et $Im(z) = y$.

Somme et Produit de 2 nombres complexes.

$z_1 = x_1 + iy_1$

$z_2 = x_2 + iy_2$.

$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$

$z_1 . z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$

$z = 0 = (x + iy)(0 + 0i) = 0$.

Conjugué d'un nombre complexe.

$z = x + iy \longrightarrow \bar{z} = x - iy$ s'appelle conjugué de z.

$Re(z) = \dfrac{z + \bar{z}}{2}$; $Im(z) = \dfrac{z - \bar{z}}{2i}$

- $\bar{\bar{z}} = z$
- $|z| = |\bar{z}|$
- $\overline{z_1 + z_2} = \overline{(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2)} = \overline{(x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)}$

$= x_1 + x_2 - iy_1 + iy_2$.

$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

- $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\;\overline{z_2}$

- $z.\overline{z} = |z|^2$
- $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$ avec $z_2 \neq 0$.

Démonstration.

$$1 = \overline{1}$$
$$1 = \overline{\left(\frac{1}{z_2} \times z_2\right)}$$
$$1 = \overline{z_2} \times \overline{\left(\frac{1}{z_2}\right)}$$
$$\frac{1}{\overline{z_2}} = \overline{\left(\frac{1}{z_2}\right)}$$
$$\overline{\left(\frac{1}{z_2}\right)}\,\overline{z_1} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$$

D'où $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$

Module d'un nombre complexe

$z = x + iy \longrightarrow |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

$\dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{z\overline{z}} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$ avec $z \neq 0$.

Le module d'un nombre complexe est tjs positif est représente la distance entre ce point complexe et l'origine

PROPRIETES

- $Re(z) \leq |Re(z)| \leq |z|$
- $Im(z) \leq |Im(z)| \leq |z|$.

Démonstration

$Re(z) = x \leq |x| \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq |z|$

• $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$.

En effet :

On a $z\bar{z} = |z|^2$

Donc $|z_1 z_2|^2 = (z_1 z_2)\overline{(z_1 z_2)}$

$= z_1 z_2 \bar{z}_1 \bar{z}_2$

$= |z_1|^2 . |z_2|^2$

D'où $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$

• $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$ avec $z_2 \neq 0$

En effet :

$\left(\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|\right)^2 = \dfrac{z_1}{z_2} \times \overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{z_1}{z_2} \times \dfrac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} = \dfrac{|z_1|^2}{|z_2|^2}$

D'où $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$.

. Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes.

On a $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

Avec égalité ssi $z_1 = \alpha z_2$ ou $z_2 = \alpha z_1$ $\alpha \in \mathbb{R}_+$.

En général,

On a $\left|\sum_{i \in I} z_i\right| \leq \sum_{i \in I} |z_i|$

En effet : $(|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|)$.

$(|z_1 + z_2|)^2 = (z_1 + z_2)\overline{(z_1 + z_2)}$

$= (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2)$

$= (z_1 \bar{z}_1) + z_1 \bar{z}_2 + z_2 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2$

$= |z_1|^2 + |z_2|^2 + z_1 \bar{z}_2 + \overline{\bar{z}_2 z_1}$

$= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\mathrm{Re}(z_1 \bar{z}_2)$

$\leq |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1 \bar{z}_2|$ $\quad |\bar{z}_2| = |z_2|$

$\leq |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1||z_2|$

$\leq (|z_1| + |z_2|)^2$

D'où $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.

Pr comparer 2 complexes ils doivent être de m̄ forme

Forme exponentielle de 1 nombre complexe

La forme exponentielle d'un nombre complexe $z = x + iy$ est donné par $z = re^{i\theta}$

avec $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

$\theta =$ argument determiné par $\tan\theta = \frac{y}{x}$

- $\bar{z} = re^{-i\theta}$

Exemple

$e^{i\pi/2} = i$

$e^{i\pi} = -1$

$e^{i\frac{3\pi}{2}} = -i$

- $1 + i = \sqrt{2}\, e^{i\pi/4}$
- $-2e^{i\theta} = 2\, e^{i\theta} e^{i(\pi + 2k\pi)}$
- $(1-i)^{2011} = 2^{1005}(-1-i)$.

En effet :

$$(1-i)^{2011} = \left(\sqrt{2}\, e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)^{2011} = (\sqrt{2})^{2011} \cdot e^{-i\frac{2011\pi}{4}}$$

$$= (\sqrt{2})^{2011} e^{-i\left(2012\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right)}$$

$$= (\sqrt{2})^{2011} e^{-i(503\pi - \pi/4)}$$ $503\pi = 502\pi + \pi$

$$= (\sqrt{2})^{2011} e^{-i(\pi - \pi/4)}$$

$$= (\sqrt{2})^{2011} e^{-i(3\pi/4)}$$

$$= (\sqrt{2})^{2011} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$= (2)^{1005}(-1-i).$$

Formule d'Euler

- $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$
- $e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$
- $\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$
- $\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$

Formule de Moivre

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = (e^{i\theta})^n = e^{i(n\theta)} = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

Exemple.

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes.

1 • $z^2 + iz + 2 = 0$.

$\Delta = b^2 - 4ac = (i)^2 - 4(2) = -1 - 8 = -9 = 9i^2$.

$$\begin{cases} z_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-i-3i}{2} = -2i \\[2ex] z_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-i+3i}{2} = +i. \end{cases}$$

2 • $z^3 - 1 = 0$

$z^3 = 1$.

On pose $z = re^{i\theta}$

$z^3 = 1$

alors $r^3 e^{i3\theta} = 1$

$r^3 e^{i3\theta} = e^{i2k\pi}$

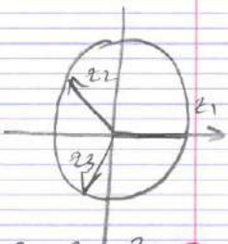
Par comparaison $r^3 = 1 \Rightarrow r = 1$

$3\theta = 2k\pi \Rightarrow \theta = \frac{2}{3}k\pi$.

Pour $k = 0$ $z_1 = 1$

$k = 1$ $z_2 = e^{i\frac{2\pi}{3}} = j$

$k = 2$ $z_3 = e^{i\frac{4\pi}{3}} = j^2$



z_1, z_2, z_3 m̃ module espacés de $\frac{2\pi}{3}$

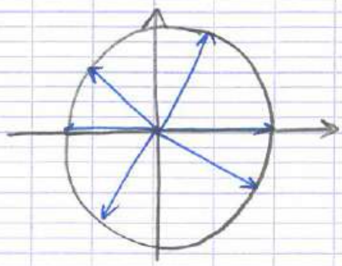
3 • $z^6 - 1 = 0$.

$z^6 = 1$.

$z^6 = r^6 e^{i6\theta} = e^{i2k\pi}$

$r^6 = 1 \Rightarrow r = 1$.

$6\theta = 2k\pi \Rightarrow \theta = \frac{1}{3}k\pi$.



Pour $k = 0$ $z_1 = 1$

$k = 1$ $z_2 = e^{i\pi/3}$

$k = 2$ $z_3 = e^{i2\pi/3}$

$k = 3$ $z_4 = e^{i\pi}$

$k = 4$ $z_5 = e^{i4\pi/3}$

$k = 5$ $z_6 = e^{i5\pi/3}$.

CHEMINS ET TRAJECTOIRES.

Définition :

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$

Soit h continue telle que $h : I \to \mathbb{R}^2$

h s'appelle un chemin de $\mathbb{R}^2$

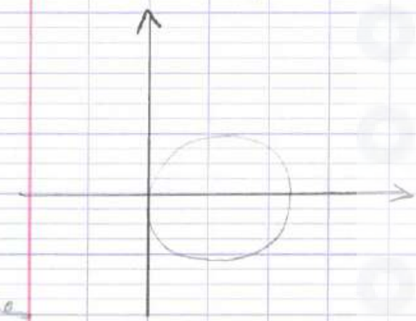
et $\mathrm{Im}(h)$ = Trajectoire de h.

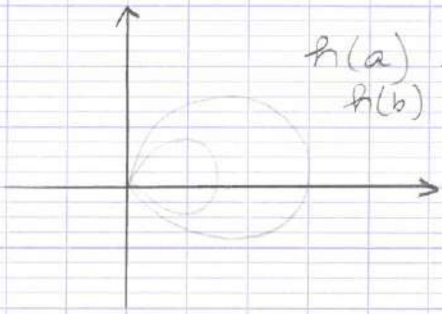
Définition :

Si $I = [a, b]$, $h(a)$ s'appelle point de départ et $h(b)$ s'appelle point d'arrivée.

Si $h(a) = h(b)$ le chemin est alors un lacet (Trajectoire fermée).

$h(a)$ passe par 0
pr $t \neq$
$h(b)$ passe par 0
2 paramètre
$\Rightarrow$ m point

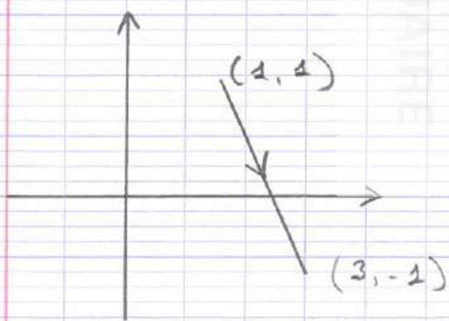




$h(a) = 0$
$h(b)$ passe 0
$h(c)$ passe par 0

Exemple.

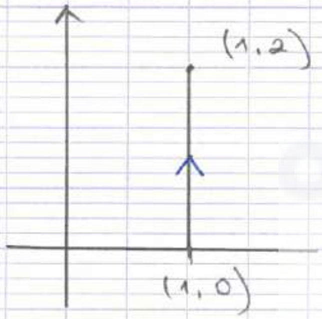
$h : [0, 2] \to \mathbb{R}^2$
$\quad t \to (t + 1, 1 - t)$.



vérificatº
$h(0) = (1 ; 1)$ ✓
$h(2) = (3 ; -1)$ ✓.

- $h : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$t \longrightarrow (1, t+1)$



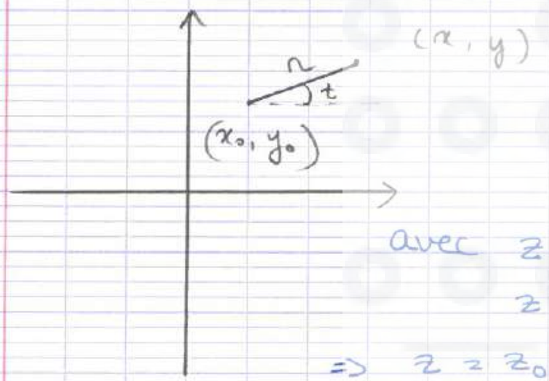
Verificat°.

$h(-1) = (1, 0)$

$h(1) = (1, 2)$

ARC DE CERCLE

Equation Paramétrique d'un cercle de centre $z_0 = (x_0, y_0)$ et de rayon r.



$x = x_0 + r\cos t$

$y = y_0 + r\sin t$.

avec $z = x + iy = x_0 + r\cos t + i(y_0 + r\sin t)$

$z = x_0 + iy_0 + r(\cos t + i\sin t)$

$\Rightarrow z = z_0 + re^{it}$

Alors $h(t) = z_0 + re^{it}$ est l'équat° paramétrique d'un arc de cercle centré en z_0 et de rayon r.

t précise le sens de la trajectoire

Exemple

Tracer la Trajectoire

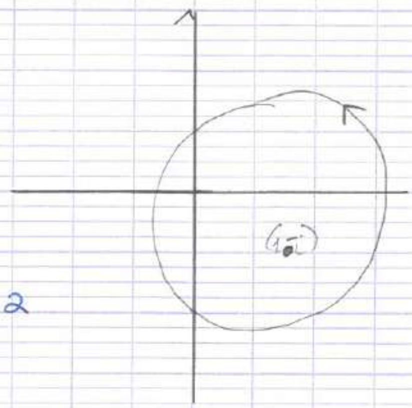
$h : [0 ; 2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$

$t \longrightarrow \underbrace{1 - i}_{} + 2e^{it}$

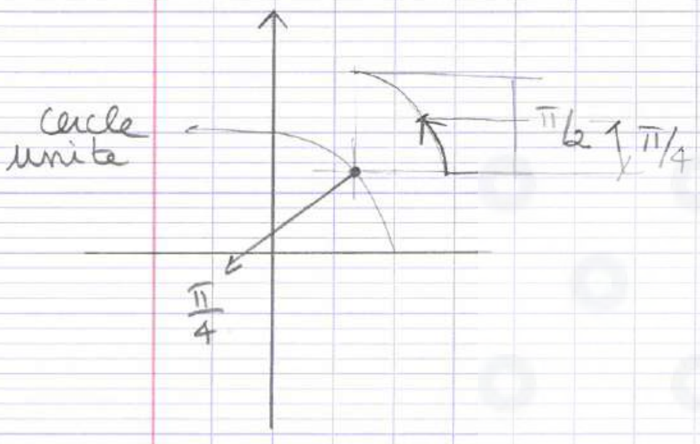
De la forme $z_0 + re^{it}$

Cercle centré en $(1-i)$ de rayon 2

car $[0, 2\pi]$



$$h : [0 ; \pi/4] \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$t \longrightarrow e^{i\pi/4} + \frac{\pi}{4} e^{it}$$



EQUATION PARAMETRIQUE D'UN SEGMENT $[z_A , z_B]$

z_A : pt de départ

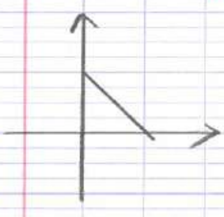
z_B : pt d'arrivee.

L'équat° paramétrique d'un segment $[z_A , z_B]$ est de la forme.

a et b sont des paramètres à choisir

$$h : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$t \longrightarrow \left(\frac{b-t}{b-a}\right) z_A + \left(\frac{t-a}{b-a}\right) z_B$$

Exemple : Paramétrisat° du segment $[\underset{z_A}{i} , \underset{z_B}{1}]$.



On choisit $[a,b] = [0,1]$.

$[i , 1] = [z_A , z_B]$.

$$h : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$t \longrightarrow \left(\frac{1-t}{1}\right) i + \frac{t-0}{1} \times 1 .$$
$$= (1-t) i + t .$$

Verificat° $h(0) = i$ ✓

$h(1) = 1$ ✓

On trouve 2 chemins ayant 2 lim $\neq$ $\Rightarrow$ Pas de lim

RAPPEL SUR LES LIMITES DE FCT° à 2 VARIABLES.

Théorème des 2 chemins

- Si $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = l$

Alors pour tout chemin P, on a
$\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,b) = l$

limite en $(0,0)$
Chemin
$y = x$
$x \neq 0$ X
Il faut que chemin passe par le pt

- Si $\lim\limits_{\substack{P_1\\(x,y)\to(x_0,y_0)}} f(x,y) \neq \lim\limits_{\substack{P_2\\(x,y)\to(x_0,y_0)}} f(x,y)$, alors
f n'a pas de limites.

Exemple : ETUDIER LA LIM de $f(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ en $(0,0)$ avec P_1 : axe des X
P_2 : axe des Y.

Sur axe des X, $(x,y)\to(0,0)$ $\sim$ $x\to 0$, $y = 0$.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right) = \lim_{\substack{x\to 0\\ y=0}} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x^2-y^2)}{x^2+y^2} = \lim_{\substack{y\to 0\\ x=0}} \frac{-y^2}{y^2} = -1.$$

Deux lim $\neq$

Donc lim n'existe pas.

ou on prend 1 seul chemin
$y = mx \Rightarrow$ lim dépend de m
$\Rightarrow$ lim n'existe pas.

DEFINITION : Fonctions d'une variable complexe.

DEFINITION

On considère mtn les fct° d'une variable complexe la differentiat° et l'intégrat° définie pour les fct° réelles d'une variable réelle prennent une

nouvelle significat° dans le domaine complexe.
Seules les fct° HOLOMORPHES peuvent être librement différentiée et intégrées.

derivable ou pas.

PARTIE REELLE ET PARTIE IMAGINAIRE D'UNE FONCTION.

Si $w = u + iv$ est la valeur d'une fct° f au point $z = x + iy$

$$u + iv = f(x + iy)$$

et on a $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$.

Exemple.

Si $f(z) = z^2 = (x + iy)^2 = x^2 + 2ixy - y^2$

$$u(x, y) = x^2 - y^2$$
$$v(x, y) = 2xy$$

LIMITES

Dire que la limite de $f(z)$ lorsque z tend vers z_0 est un nb w_0.
Autrement dit, écrire :

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0$$

Signifie que le point $w = f(z)$ peut être rendu proche de w_0 si le pt z est choisi aussi proche de z_0.

Pour une fct° $f(z)$ de la forme
$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y) ;$$

$z_0 = x_0 + iy_0$
$w_0 = u_0 + iv_0$.

On a $\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0$.

ssi $\begin{cases} \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y) = u_0 \\ \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y) = v_0 \end{cases}$

CONTINUITÉ

La fct: $f(z)$ est dite continue au point z_0, si elle est définie autour de z_0 et si on a :

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$$

DERIVÉE

La dérivée de f en z_0 notée $f'(z_0)$ est définie par

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

à la conditio que cette limite existe.

EXEMPLE

$f(z) = |z|^2$ elle est dérivable en $z_0 = 0$?

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \to 0} \frac{|z|^2 - 0}{z}$$

$$= \lim_{z \to 0} \frac{z \cdot \bar{z}}{z}$$

$$= \lim_{z \to 0} = \bar{z} = 0.$$

$f(0) = 0$.
lim existe en 0 étou

$f(z) = z^2$ est-elle dérivable en $z_0 = i$.

limite :

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \to i} \frac{z^2 - i^2}{z - i}$$

$$= \lim_{z \to i} z + i$$

$$= 2i$$

$f'(i) = 2i$

Propriétés

1° $(f+g)' = f' + g'$

2° $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2}$

3° $(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(n-k)} g^{(k)}$; $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

4° $(az^n)' = n a z^{n-1}$

5° $\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k\right)' = \sum_{k=1} a_k k z^{k-1}$

6° Rayon de convergence $\lim_{k \to \infty} \left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|$.

Exemple

Si $e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$.

$$(e^z)' = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}\right)' = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k z^{k-1}}{k!}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{k-1}}{(k-1)!}$$

Chang^t de variable

$l = k-1$ $\quad \sum_{l=0}^{\infty} \frac{z^l}{l!} = e^z.$

$$R = \lim_{k\to\infty} \frac{(k+1)!}{k!} = \lim_{k\to\infty} (k+1) = \infty.$$

FONCTIONS HYPERBOLIQUES _ TRIGONOMETRIQUES.

* $\operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!}$ Partie Paire de e^z.

* $\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}$ Partie Impaire de e^z.

* $\operatorname{ch} z + \operatorname{sh} z = e^z$
* $(\operatorname{ch} z)' = \operatorname{sh} z$
* $(\operatorname{sh} z)' = \operatorname{ch} z$

* $\cos z = \operatorname{ch}(iz) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iz)^{2k}}{(2k)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k}.$

* $\sin z = \frac{1}{i} \operatorname{sh}(iz) = \frac{1}{i} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iz)^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{1}{i} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}.$

* $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$
* $\operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = 1$
* $\operatorname{ch}(z) = \operatorname{ch}(-z)$
* $\operatorname{sh}(-z) = -\operatorname{sh}(z)$

Exemple $\quad \operatorname{ch}(i.i) = \operatorname{ch} i^2$

1°= $\cos i = \operatorname{ch}(-1) = \frac{e^{-1} + e}{2} \sim 1.5.$

2°= $\operatorname{ch}(e^{i\pi/4}) = \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$

$$= \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cos\left(i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\sin\left(i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$= \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) ch\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) sh\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$= \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) ch\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \frac{1}{i}\sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) sh\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \times \frac{i}{i}$$

$$= \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) ch\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \frac{i}{1}\sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) sh\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

- Resoudre $e^{iz} - e^{-iz} = 4$

$$e^{iz} - e^{-iz} = 4$$

$$e^{iz}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right) = 4e^{iz}$$

$$e^{2iz} - 1 = 4e^{iz}$$

On pose $X = e^{iz}$

$$X^2 - 4X + 1 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 16 - 4 = 12$$

$$X = \frac{4 \pm \sqrt{12}}{2} = 2 \pm \sqrt{3}$$

$$e^{iz} = 2 \pm \sqrt{3}$$

$z = x + iy$

$$e^{iz} = e^{ix} \cdot e^{i^2y} = 2 \pm \sqrt{3} \times 1$$

$$= e^{ix} \cdot e^{-y}$$

$$e^{-y} = 2 \pm \sqrt{3}$$

$$y = -\ln\left(2 \pm \sqrt{3}\right)$$

$$x = 2k\pi$$

$$z = 2k\pi - i\ln\left(2 \pm \sqrt{3}\right)$$

Trouver le domaine de définition de

$$\frac{1}{e^z + 3}.$$

$$e^z + 3 \neq 0$$

$$e^z + 3 = 0$$
$$e^z = -3$$
$$z = x + iy$$
$$e^x . e^{iy} = -3 = (3 \times (-1))$$
$$e^x . e^{iy} = 3 e^{i(\pi + 2k\pi)}$$
$$x = \ln 3$$
$$y = \pi + 2k\pi.$$

$$z = \ln(3) + i(\pi + 2k\pi).$$

Domaine de définition

$$\mathbb{C} \setminus \{z\}.$$

FONCTIONS HOLOMORPHES.

Une fct° $w = f(z)$ est dite holomorphe en un point donné z d'un domaine D, si elle est dérivable aussi bien au point z lui m̂ que ds. certain voisinage de ce point.

On dit que la fct° $w = f(z)$ est holomorphe dans le domaine D si elle est dérivable en chaque point du domaine

c.à.d. Dérivable ds $\mathbb{C}$

CONDITIONS DE CAUCHY-RIEMANN.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\[2mm] \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

Les conditions de Cauchy-Riemann sont les condit° nécessaires mais pas suffisantes pour l'existence de la dérivée d'une fct° f en un point.
Elles peuvent donc être utilisées pour localiser les pts où f ne possède pas de dérivée.

PROPOSITION

Si les condit° de Cauchy-Riemann sont satisfaites, et si les 4 dérivées partielles sont continues, alors f est holomorphe et on a :

$$\boxed{f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}}$$

Exemple

Vérifier si la fct° f est holomorphe :

- $f(z) = \bar{z}$

$f(z) = \bar{z} = x - iy$

$\rightarrow u(x,y) = x$
$\rightarrow v(x,y) = -y$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= 1 \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= -1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow f \text{ pas holomorphe.}$$

- $f(z) = |z|^2$.

$f(z) = |z|^2 = x^2 + y^2$

$\rightarrow u(x,y) = x^2 + y^2$
$\rightarrow v(x,y) = 0$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= 2x \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

Pas holomorphe ds tout $\mathbb{C}$.
Il faut $x = 0$.

- $f(z) = e^z$.

$$f(z) = e^z = e^x . e^{iy} = e^x . (\cos y + i \sin y)$$
$$= e^x \cos y + i e^x \sin y.$$

$\to u(x,y) = e^x \cos y$

$\to v(x,y) = e^x \sin y.$

$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} = e^x \cos y. \end{array}\right\} \Rightarrow$ Première condit° ✓

$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} = e^x \cos y. \end{array}\right\} \Rightarrow$ Deuxième condit° ✓

} Dérivée Partielle Continue

D'où f est holomorphe

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$= e^x \cos y + i e^x \sin y = e^x . e^{iy} = e^z.$$

INTEGRATION DANS $\mathbb{C}$.

Soit f une fct° : $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$

Soit T une trajectoire de $\mathbb{D}$, de point de départ $A(z_A)$ et point d'arrivée $B(z_B)$.

Soit h un chemin de trajectoire T, défini sur $[a, b]$.

L'intégrale de f sur T est définie par :

$$\int_T f(z)\, dz = \int_a^b f(h(t))\, h'(t)\, dt.$$

Exemple

1°: $\displaystyle\int_{[i,1]} \bar{z} \, dz$

$$h : [a,b] \to \mathbb{C}$$
$$t \to \left(\frac{b-t}{b-a}\right) z_A + \left(\frac{t-a}{b-a}\right) z_B .$$

$$h\,[0,1] \to \mathbb{C}$$

$$\frac{(1-t)}{1}\cdot i + \frac{t}{1}\cdot 1 = (1-t)i + t .$$

$$h'(t) = -i + 1 .$$

$$\int_{[i,1]} \bar{z}\, dz = \int_0^1 (t - i(1-t))\,(1-i)\,dt .$$

$$= (1-i)\int_0^1 \big(t - i(1-t)\big)\,dt$$

$$= \vdots$$

$$= -i .$$

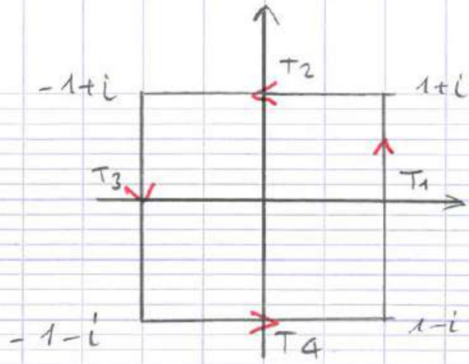
2°: $\displaystyle\int \bar{z}\, dz$ $\quad h(t) = e^{it}$ et $t \in [\pi/2 \,;\, 0]$

$$h'(t) = i e^{it}$$

$$\int \bar{z}\, dz = \int_{\pi/2}^{0} e^{-it}\cdot i e^{it}\, dt = it\Big]_{\pi/2}^{0} = -\frac{\pi i}{2} .$$

10

$3°$ $\oint_{P} \bar{z}\, dz$.



$T = T_1 \cup T_2 \cup T_3 \cup T_4$.

Chemin 1

$$t\,[a,b] \longrightarrow \left(\frac{b-t}{b-a}\right) z_A + \left(\frac{t-a}{b-a}\right) z_B$$

$$t\,[-1,1] \longrightarrow \frac{(1-t)}{2}(1-i) + \frac{t+1}{2}(1+i)$$

$$h(t) = 1+it.$$

$$h'(t) = i$$

$$\int_{[1-i\,;\,1+i]} \bar{z}\, dz = i\int_{-1}^{1} (1-it)\, dt = 2i$$

Chemin 2

$$I_1 = I_2 = I_3 = I_4 = 2i$$

$$I = 8i.$$

$T = T_1 \cup T_2 \cup T_3 \cup T_4$

$4°$ $\int z^2\, dz$ m̄ chemin que $3°$.

$$I_1 = i\int_{-1}^{1} (1+it)^2\, dt = \left(\frac{1+i}{3}\right)^3 - \left(\frac{1-i}{3}\right)^3$$

$$I = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = 0.$$

THEOREME

Soit f holomorphe sur un domaine D et T une trajectoire qui est située entièrement ds D avec 1 pt de depart z_A et pt d'arrivée z_B.

$$\Rightarrow \int_T f'(z)\,dz = f(z)\Big]_{z_A}^{z_B} = f(z_B) - f(z_A)$$

si dérivée

Intégrale ne dépend pa du chemin suivi. slt pt d'arrivée et de depart.

Intégrale sur chemin fermé

$$\oint_T f'(z)\,dz = 0$$

Exemple :

1 : $\displaystyle\oint_{C(0,1)} z^2\,dz = 0$

$\frac{z^3}{3}$ fct° holomorphe ds le domaine special +

sur $C(0,1)$ t.q $\left(\frac{z^3}{3}\right)' = z^2$

De plus le chemin est un chemin fermé.

D'où $\oint z^2\,dz = 0$

Deuxième methode

$$\int f(h(t))\,h'(t)$$

$h(t) = e^{it}$ $\quad t \in [0, 2\pi]$

$h'(t) = ie^{it}$

$$\int_T f(z)\,dz = \int f(h(t))\,h'(t)\,dt$$

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi} e^{i2t} \cdot i e^{it}\, dt = i \int_0^{1} e^{i3t}\, dt = \left[\frac{1}{3} e^{i3t}\right]_0^{2\pi} = 0.$$

2° : $$\int_{[i,1]} \frac{1}{z^2}\, dz = \left[-\frac{1}{z}\right]_1^{i} = -1 + \frac{1}{i}$$

car la fct $\left(-\frac{1}{z}\right)' = \frac{1}{z^2}$ est une fct° holomorphe sauf en 0

~~Système~~ Segment ne passe pas par 0.

3° : $$\oint_{C(a,r)} \frac{1}{z-a}\, dz$$

On ne peut pas appliquer log(–) parce qu'elle n'est pas holomorphe.

$h(t) = a + r e^{it}$ $\quad t \in [0, 2\pi]$

$h'(t) = r i e^{it}$

$$\Rightarrow \int f(z)\, dz = \int_0^{2\pi} f(h(t))\, h'(t)\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{a + re^{it} - a}\right) r i e^{it}\, dt = \int_0^{2\pi} i\, dt = 2\pi i$$

À retenir

$$\boxed{\oint_{C(a,r)} \frac{dz}{z-a} = 2i\pi.}$$

La fonction logarithme.

On définit le logarithme d'une variable complexe non nulle $z = re^{i\theta}$ par l'équation

$$\log z = \log r + i\theta$$

Autrement dit on a :

$$\log z = \log r + i \arg z \qquad z \neq 0.$$

$e^z = e^x . e^{iy}$

e^z ne peut pas être $= 0$

$\Rightarrow e^x = 0$ Impossible

Le symbole $\arg z$ désigne une déterminat° arbitraire de l'argument de z.

Ainsi, chaque nombre complexe $z \neq 0$, possède un ensemble infini de logarithmes

Le logarithme est donc une fct° à une infinité de déterminat°.

Sa partie réelle est définie de manière unique, sa partie imaginaire à un terme additif multiple de 2π.

On peut montrer en utilisant les condit° de Cauchy-Riemann (polaires) que la fct° $\log z$ n'est pas holomorphe dans tout son domaine.

Exemple.

1°
$$\oint_{C(i,1)} \frac{(z+1)^3}{z-i}\, dz.$$

Première Methode : methode des Chemins

$h(t) = i + e^{it}$

$h'(t) = i + e^{it}.$

(12)

$$\int_0^{2\pi} \frac{(i+e^{it}+1)^3}{e^{it}} e^{it} = i\int_0^{2\pi} (i+1+e^{it})^3 dt =$$

Deuxième Méthode

$$\oint_{C(i,1)} \frac{(z+1)^3}{z-i} dz$$

Or : $(z+1) = (z-i+i+1)$

$(z+1)^3 = (z-i+i+1)^3$

$= (z-i)^3 + 3(z-i)^2(1+i) + 3(z-i)(1+i)^2 + (i+1)^3$.

$$\oint_{C(i,1)} \frac{(z+1)^3}{z-i} dz = \underbrace{\oint_{C(i,1)} (z-i)^2 dz}_{0} + 3(i+1)\underbrace{\oint_{C(i,1)} (z-i) dz}_{0} + 3(1+i)^2 \underbrace{\oint_{C(i,1)} dz}_{0} +$$

$$(i+1)^3 \oint \frac{1}{z-i} dz$$

$\frac{(z-i)^3}{3}$ holomorphe

chemin fermé

$= 2i\pi (i+1)^3$.

2°. $\oint_{C(1+i,1)} e^{z+e^z} dz = 0$

car $\left(e^{e^z}\right)' = e^{z+e^z}$

holomorphe + chemin fermé.

3°
$$\int_{[i,z)} \frac{z-1}{z^3}\, dz = \int_{[i,1]} \frac{dz}{z^2} - \int_{[i,T]} \frac{dz}{z^3}.$$
$$= \left[-\frac{1}{z}\right]_i^1 + \left[\frac{1}{2z^2}\right]_i^1.$$

THEOREME.

Si $f(z)$ est holomorphe ds un domaine D et sur sa frontière T, alors
$$\oint_T f(z)\,dz = 0.$$

THEOREME.

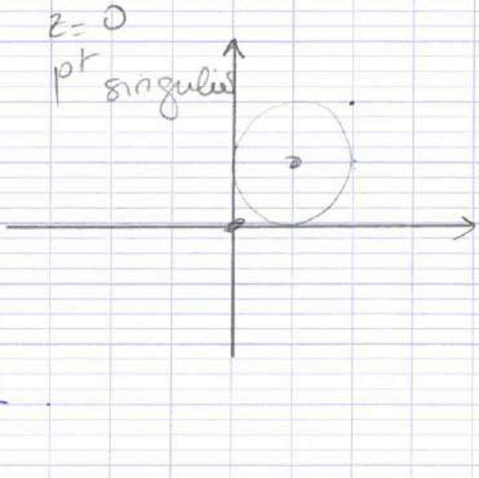
Soit $f(z)$ une fct° holomorphe ds un domaine D et $z_0 \notin D$, on dit que z_0 est un pt singulier de f (pôle de f).

Un pôle qui se trouve à l'ext. de la courbe fermée ne contribue pas à l'intégrale et on a :
$$\oint_T f(z)\,dz = 0$$

Si les pts singuliers de f se trouvent à l'extérieur du T.

Exemple.

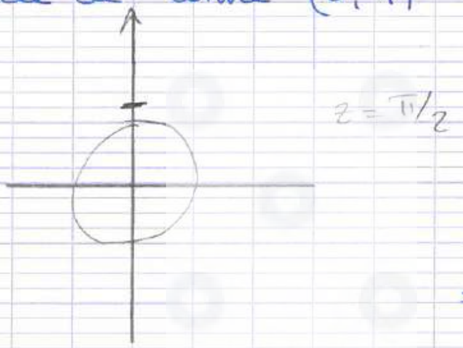
1°
$$\oint_{C(1+i,\,1)} \frac{1}{z}\, dz = 0$$



car $z=0$ se trouve à l'exterieur de la courbe.

2°: $\displaystyle\oint_T \frac{z+\cos z}{z-\frac{\pi}{2}}\, dz$.

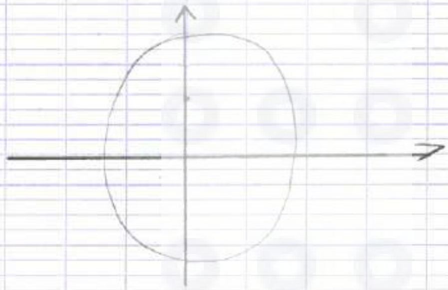
T: Cercle de centre $(0,1)$, rayon 1.



$z = \frac{\pi}{2}$ se trouve à l'ext. du cercle

$\Rightarrow \int = 0$.

3°: $\displaystyle\oint_{C(0,2)} \frac{1}{z^2-1}\, dz$



elt singulier ± 1.

$\in T$ $z=1$

$z=-1$.

Methode de chemins

$h(t) = 2e^{it}$ $t \in [0, 2\pi]$.

$h'(t) = 2ie^{t}$

$$\int \frac{1}{z^2-1} = \int \frac{1}{4e^{i2t}-1}\, 2ie^{it}\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{2ie^{it}}{(2e^{it}-1)(2e^{it}+1)} = 0$$

On pose $x = e^{it}$

Définition

Soit f une fct et $z_0 \in D_f$ /

$f(z_0) = 0$

$\Rightarrow$ z_0 s'appelle un zero de f.

DEFINITION

Soit f holomorphe et $z_0 \in D_f$ /

$$f(z_0) = f'(z_0) = \_\_\_ = f^{(m-1)}(z_0) = 0$$

et $f^{(m)}(z_0) \neq 0$

Alors z_0 s'appelle un zero d'ordre m.

EXEMPLE

Déterminer les zéros des fct suivantes puis donner leur ordre.

- $f(z) = z \sin z$.

$$f(z) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ \sin z = 0 \end{cases}$$

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ z = k\pi & k \neq 0. \end{cases}$$

$\sin z = 0$

$e^{iz} - e^{-iz} = 0$

$e^{iz} = e^{-iz}$

$e^{2iz} = 1$

$= e^{2ik\pi}$

$z = k\pi$

$$f'(z) = \sin z + z \cos z$$

$$f''(z) = 2\cos z - z \sin z.$$

$z = 0$; $\left.\begin{array}{l} f(z) = 0 \\ f'(z) = 0 \\ f''(z) = 2 \neq 0 \end{array}\right\}$ $z = 0$ est un zéro d'ordre 2.

$z = k\pi$; $k \neq 0$; $\left.\begin{array}{l} f(z) = 0 \\ f'(z) = \pm k\pi \neq 0 \end{array}\right\}$ $z = k\pi$ est un zéro d'ordre 1.

- $f(z) = 1 - \operatorname{ch} z$

$\operatorname{ch} z = \cos\left(\frac{z}{i}\right)$

$\operatorname{sh} z = 0 \iff z = ik\pi$

$\operatorname{ch} z = 0 \iff z = \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) i$

$f(z) = 0 \iff 1 - \operatorname{ch} z = 0$

$\operatorname{ch} z = 1$

$\cos\left(\frac{z}{i}\right) = 1$

$\frac{z}{i} = 2k\pi$

$z = 2k\pi i$

$f'(z) = -\operatorname{sh}(z)$

$f''(z) = -\operatorname{ch}(z)$

- $z = 2ik\pi$

$\left.\begin{array}{l} f(z) = 0 \\ f'(z) = 0 \\ f''(z) \neq 0 \end{array}\right\}$ zéro d'ordre 2

THEOREME.

Soit $h = f.g$ t.q f, g, h sont holomorphes.

- $\left\{\begin{array}{l} \text{Si } z_0 \text{ est un zéro d'ordre } m \text{ de } f \\ \text{Si } z_0 \text{ est un zéro d'ordre } n \text{ de } g \end{array}\right.$

Alors

z_0 est un zéro d'ordre $(n+m)$ de h

. Si z_0 est un zéro d'ordre m de f

Alors

z_0 est un zéro d'ordre mp de f^p

EXEMPLE.

Determiner les zéros et trouver leur ordre.

1- $f(z) = \sin^3 z \, (1-\cos z)^2$.

On pose

$g(z) = \sin^3 z$

$h(z) = (1-\cos z)^2$

$g(z) = 0 \iff \sin^3 z = 0$

$\iff \sin z = 0$

$\iff z = k\pi$.

$h(z) = 0 \iff 1-\cos z = 0$

$\iff \cos z = 1$

$\iff z = 2k\pi$.

Pour $z = 2k\pi$	$z = (2k+1)\pi$	$z = 0$.
$g'(z) = -\cos z$	$\neq 0$	
$g''(z) = -\sin z$.		
z_0 d'ordre $m+n$	$3(1) + 2(0)$ $= 3$.	$3(1) + 2(2)$ $= 7$
$h'(z) = \sin z$	$h(z) \neq 0$	
$h''(z) = \cos z$.		
$\overbrace{3(1)}^{m} + \overbrace{2(2)}^{n} = 7$.		
$f^p \iff mp$		
$m = 3 \times 1 = m'p$		
$n = 2 \times 2 = n'p$		

2- $f(z) = (z^2-1)^5 (z^3-1)^2 (z^2+z+1)^3$

On pose

$f(z) = (z^2-1)^5$

$g(z) = (z^3-1)^2$

$h(z) = (z^2+z+1)^3$

$z^2 = 1 \iff z = \pm 1$

$z^3 = 1 \iff \begin{cases} z = 1 \\ z = j \\ z = j^2 \end{cases}$

$z^2+z+1 = 0 \iff \begin{cases} z = j \\ z = j^2 \end{cases}$

$f(z) = (z-1)^5(z+1)^5 (z-1)^2(z-j)^2(z-j^2)^2 (z-j)^3(z-j^2)^2$

$= (z-1)^7 (z-j)^5 (z-j^2)^5 (z+1)^5$

$f(z) = 0 \iff \begin{cases} z = 1 \\ z = j \\ z = j^2 \\ z = -1 \end{cases}$

<u>Pour $z = 1$.</u>

$7(1) + 5\times 0 + 5\times 0 + 5\times 0 = 7$

<u>Pour $z = -1$</u>

$7\times 0 + 5\times 0 + 5\times 0 + 5\times 1 = 5$

<u>Pour $z = j$</u>

$7\times 0 + 5\times 1 + 5\times 0 + 5\times 0 = 5$

<u>Pour $z = j^2$</u>

$7\times 0 + 5\times 0 + 5\times 1 + 5\times 0 = 5$.

3 - $f(z) = (z^6-1)^2 (z^4-1)^2 (z^2+1)^3$

$z^6 - 1 = 0 \iff \begin{cases} z = 1 \\ z = -1 \\ z = j \\ z = -j \\ z = j^2 \\ z = -j^2 \end{cases}$

$(z^4-1) = 0 \iff \begin{cases} z = 1 \\ z = -1 \\ z = i \\ z = -i \end{cases}$

$(z^2+1)^3 = 0 \iff z = -i \quad z = i$

$f(z) = (z-1)^2 (z+1)^2 (z+j)^2 (z-j)^2 (z+j)^2 (z-1)^2 (z-i)^2$
$(z+i)^2 (z-i)^3 (z+i)^3$

$= (z-1)^4 (z+1)^4 (z-j)^2 (z+j)^2 (z-j^2)^2 (z-i)^5 (z+i)^5$

Pour $z = 1$.

$4(1) + 4(0) + 2(0) + 2(0) + 2(0) + 2(0) + 2(0)$
$+ 5(0) + 5(0)$

$= 4.$

Pour $z = -1$
$\longrightarrow 4$

Pour $z = j$
$\longrightarrow 2$

Pour $z = j \longrightarrow 2$

Pour $z = j^2 \longrightarrow 2$

Pour $z = -j^2 \longrightarrow 2$

Pour $z = +i \longrightarrow 5$

Pour $z = -i \longrightarrow 5$

THEOREME.

DEFINITION : Pôles

Soit f, g et h 3 fct° holomorphes / $f = \frac{g}{h}$

Soit z_0 un zéro d'ordre p de g / $p \geq 0$

et z_0 un zéro d'ordre q de h / $q \geq 0$.

Alors

Si $p \geq q$ z_0 s'appelle un point singulier apparent

Si $p < q$ z_0 s'appelle un pôle d'ordre $q-p$ de f.

$q - p = 1 \rightarrow$ pôle simple.

$q - p = 2 \rightarrow$ pôle double.

EXEMPLE

Déterminer les pôles des fct suivantes.

1) $\frac{\sin z}{1 - \cos z}$

$\sin z = 0 \Leftrightarrow z = k\pi$

$1 - \cos z = 0 \Leftrightarrow \cos z = 1 \Leftrightarrow z = 2k\pi$.

$z = 2k\pi$ et $z = (2k+1)\pi$.

$p = 1$ $p = 1$

$q = 2$ $q = 0$

$q - p = 1$ Pas d'informat°.

pôle simple

2. $\frac{\operatorname{sh} z}{z^3}$

$\operatorname{sh} z = 0 \iff z = ik\pi \quad k \neq 0$

$z = 0$

Pour $z = 0$

$p = 1$

$q = 3\,(1)$

Pôle double

Pour $z = ik\pi$

$p = 1$

$q = 3\,(0)$

Pas d'informat°.

3. $\frac{1}{e^z - 1}$

Pour $z = 2ik\pi$

$p = 0$

$e^z - 1 = 0 \iff z = 2ik\pi$.

$q = 1$

$q - p = 1$

Pôle simple

4. $\frac{z \sin z}{(1 - \cos^2 z)^2}$

$z = 0$

$\sin z = 0$

$z = k\pi$.

$1 - \cos^2 z = 0 \longrightarrow \cos^2 z = 1$

$\cos z = 1$

$z = k\pi$.

Soit $f(x) = 1 - \cos^2 z$

$f'(z) = 2\cos z \sin z$

$f''(z) = -2\sin^2 + 2\cos^2 z$.

Pour $z = 0$.

$$\begin{cases} p = 1 + 1 = 2 \\ q = 2(2) = 4 \end{cases}$$

Pôle d'ordre $4 - 2 = 2$.

Pour $z = k\pi$

$$\begin{cases} p = 1 \\ q = 2(2) \end{cases}$$

Pole d'ordre 3 .

THEOREME : Série de Laurent .

Une série de Laurent en a $(a \in \mathbb{C})$ est une fct° de la forme $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n$

Autrement dit :

$$f(z) = \underbrace{\ldots + \frac{a_{-2}}{(z-a)^2} + \frac{a_{-1}}{(z-a)}}_{\text{Termes de gauche}} + \underbrace{a_0 + a_1(z-a) + a_2(z-a}_{\text{Termes de droite}}$$

Remarque

* Si le terme de gauche est nul, alors la série est appelée série de Taylor où $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$

* Une série de Taylor avec $a = 0$ est appelée série entière .

THEORÈME

Soit f une fonct° holomorphe au point $a \in \mathbb{C}$ alors f admet un developpement en série de Laurent en a :

* f possède une singularité apparente en a si $\forall n < 0$, les coefficients $a_n = 0$.
* a est un pôle d'ordre K $\overset{ssi}{\Longleftrightarrow} f(z) = \sum_{n=-K}^{\infty} a_n (z-a)$
* Le developpement à gauche est illimité $\overset{ssi}{\Longleftrightarrow}$ a n'est pas un pôle.

Dans ce cas, a s'appelle un point singulier essentiel.

DEVELOPPEMENT EN SERIE ENTIERE DE LA VARIABLE COMPLEXE.

1° $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ $\quad |z| < \infty$

2° $\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$ $\quad |z| < \infty$.

3° $\cos z = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$ $\quad |z| < \infty$

4° $\operatorname{sh} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$ $\quad |z| < \infty$

5° $\operatorname{ch} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}$

6° $\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$ $\quad |z| < 1$.

7° $\frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n$ $\quad |z| < 1$.

8: $\ln(1+z) = \sum_{n\geq 1} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n}$ $\qquad |z| < 1$

9: $\ln(1-z) = -\sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{n}$ $\qquad |z| < 1.$

Donner 1 developpement en série de Laurent ou Taylor pour les fct° suivantes:

1°: $f(z) = \frac{1}{2+z}$ en $z = 1.$

On pose $y = z - 1.$

$\longrightarrow z = y + 1$

$\Rightarrow \frac{1}{3+z} = \frac{1}{3} \frac{1}{1+\frac{y}{3}}$

$= \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{y}{3}\right)^n$

Vrai pour $\left|\frac{y}{3}\right| < 1 \Rightarrow |y| < 3$

$\Rightarrow |z-1| < 3.$

$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{n+1}} y^n$

$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{n+1}} (z-1)^n$

2°: $f(z) = e^z$ en $z = 0$

On pose $y = z - 1 \Rightarrow z = y + 1$

$e^{y+1} = e^y . e$ $\qquad$ Vrai pr $|z-1| < 1$

$= e . \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!}$

$= e . \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{n!}.$

2ème Methode

$$e^{z} = e \cdot e^{z-1} = e \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z-1)^n}{n!}.$$

3°) $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)^2}$ en $z = 2$.

$y = z - 2 \quad \rightarrow \quad z = y + 2$

$$\rightarrow \quad \frac{1}{(y+1)^2} = \left(- \frac{1}{\underbrace{(y+1)}_{1+y}} \right)'$$

$$= \left(- \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n y^n \right)'$$

$$= \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} y^n \right)'$$

$$= \left(\sum_{n=\cancel{0}\,1}^{\infty} n\,(-1)^{n+1} y^{n-1} \right)$$

$$\longrightarrow \quad = \sum_{n=1}^{\infty} n\,(-1)^{n+1} (z-2)^{n-1}$$

Changement d'indices:

$\ell = n - 1$

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} (\ell+1)\,(-1)^{\ell+2}\,(z-2)^{\ell}$$

$$= \sum_{\ell=0}^{\infty} (\ell+1)\,(-1)^{\ell}\,(z-2)^{\ell}$$

4°) Démontrer que $f(z) = \dfrac{z}{9} \dfrac{1}{1 + \frac{z^4}{9}}$ est égale à $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{4n+1}}{3^{2n+2}}$

$|z| < \sqrt{3}$.

$$f(z) = \frac{z}{9} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{z^4}{9}\right)^n \qquad \text{avec } \frac{z^4}{9} < 1.$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{4n+1}}{9^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{4n+1}}{3^{2n+2}}.$$

Exercice : Developpement de Taylor ou Laurent.

1) $f(z) = \frac{\operatorname{sh} z}{z^7}$ $\qquad z = 0$

Pôle d'ordre ?

$$f(z) = \frac{1}{z^7} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n-6}}{(2n+1)!} \qquad 0 < |z| < \infty$$

Donc $z = 0$

Pôle d'ordre 6.

2). $f(z) = \frac{1 - \operatorname{ch} z}{z^4}$ $\qquad z = 0$

Pôle d'ordre ?

$$\operatorname{ch} z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{z^2}{2} + \cdots$$

$$1 - \operatorname{ch} z = - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

$$\frac{1 - \operatorname{ch} z}{z^4} = - \sum_{n=1} \frac{z^{2n-4}}{(2n)!} \qquad z = 0 \qquad 0 < |z| < \infty$$

Pôle d'ordre 2

3) $f(z) = \frac{1}{z(z-1)}$ $\qquad z = 0$ Pôle d'ordre ?

$$f(z) = -\frac{1}{z}\left(\frac{1}{1-z}\right)$$

$$= -\frac{1}{z} \sum_{n=0}^{+\infty} z^n \qquad 0 < |z| < 1$$

$$= - \sum_{n=0}^{+\infty} z^{n-1}$$

$z = 0$ Pôle d'ordre 1

Démontrer que pour $0 < |z| < 4$ on a

$$\frac{1}{4z - z^2} = \frac{1}{4z} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{4^{n+2}}$$

$$\frac{1}{4z-z^2} = \frac{1}{4z\left(1-\frac{z}{4}\right)} = \frac{1}{4z} \times \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{z}{4}\right)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{4^{n+1}}$$

$$= \frac{1}{4z} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^{n-1}}{4^{n+1}} \qquad \ell = n-1$$

$$= \frac{1}{4z} + \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{z^{\ell}}{4^{\ell+2}}$$

DEFINITION

Soit f holomorphe, et on a $a \in \mathbb{C}$
On appelle résidu de f au point a, noté $\text{Rés}(f, a)$ le coefficient a_{-1} du dev. en série de Laurent de f en a.

Remarque.

1▷ f possède une singularité apparente en a si pour tout $n < 0$ les coefficients $a_n = 0$

2▷ Si a est un point singulier apparent la série de Laurent est une série de Taylor, et on a $a_{-1} = 0$.

Exemple.

1ère méthode : Ecrire par série

2ème méthode : "p et q"

1° Calculer $\text{Rés}\left(\frac{\sin z}{z}, 0\right)$

$$\left.\begin{array}{l} p = 1 \\ q = 1 \neq 0 \end{array}\right\} p \geq q \Rightarrow \text{Point singulier apparent}$$

$\Rightarrow a_{-1} = 0$

résidu $= 0$

2°: Calculer $\mathrm{Res}\left(z^4 \sin \frac{1}{z}, 0\right)$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots \quad \text{pour } |z| < \infty$$

$$\sin \frac{1}{z} = \frac{1}{z} - \frac{1}{z^3 . 3!} + \frac{1}{5!\, z^5} + \dots \quad \text{pour } 0 < |z| < \infty$$

$$z^4 \sin\left(\frac{1}{z}\right) = z^4 \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{3!\, z^3} + \frac{1}{5!\, z^5} \dots \right)$$

$$= z^3 - \frac{1}{3!} z + \frac{1}{5!} z^{-1} \dots$$

$$\boxed{\text{Donc } \mathrm{Res}\left(z^4 \sin\left(\frac{1}{z}\right), 0\right) = \frac{1}{5!} = \frac{1}{120}}$$

c'est le terme du $\frac{1}{z}$ car en 0 $(z-0)^{-1}$

3°: Calculer $\mathrm{Res}\left(z^8 \cos\left(\frac{1}{z}\right), 0\right)$

Pour $|z| < \infty$.

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \frac{z^8}{8!} - \frac{z^{10}}{10!} + \dots$$

Pour $0 < |z| < \infty$

$$\cos\left(\frac{1}{z}\right) = 1 - \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{4!\, z^4} - \frac{1}{6!\, z^6} + \frac{1}{8!\, z^8} - \frac{1}{10!\, z^{10}} + \dots$$

$$z^8 \cos \frac{1}{z} = z^8 - \frac{z^6}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^2}{6!} + \frac{1}{8!} - \frac{1}{10!\, z^2} + \dots$$

$a_{-1} = 0$

$$\Rightarrow \boxed{\mathrm{Res}\left(z^8 \cos \frac{1}{z}, 0\right) = 0}$$

4°: Calculer $\mathrm{Res}\left(\frac{1}{z^2-1}, 1\right)$

Il faut arriver $\sum a_n (z-1)$ et verifier n

$$\frac{1}{z^2-1} = \frac{1}{(z-1)(z+1)}$$

On pose $y = z - 1$

$$\frac{1}{y(y+2)} = \frac{1}{2y\left(\frac{y}{2}+1\right)} = \frac{1}{2y} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{y}{2}\right)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{y^{n-1}}{2^{n+1}}$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{-n} \frac{(z-1)^{n-1}}{2^{n+1}}$$

Res = coef $(z-1)^{-1}$

$\Rightarrow n-1=-1$

$n=0$

$\frac{(-1)^{-n}}{2^{n+1}}$ pr $n=0$

$\frac{1}{2}$

Donc $\mathrm{Res}\left(\frac{1}{z^2-1}, 1\right) = \frac{1}{2}$

5°: Calculer $\mathrm{Res}(z^4 \sin z, 0)$

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$z^4 \sin z = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1) \frac{z^{2n+5}}{(2n+1)!}$$

Donc $\mathrm{Res}(z^4 \sin z, 0) = 0$; $a_{-1} = 0$.

valeur $2n+5=-1$ n'existe pas

d'où résidu $= 0$.

THEOREME : Autre méthode pour calculer les résidus.

Si a est un pôle d'ordre m, alors

$$\mathrm{Res}(f, a) = \lim_{z \to a} \frac{[(z-a)^m f(z)]^{(m-1)}}{(m-1)!}$$ dérivée d'ordre $m-1$

Remarque :

* Si a est un pôle simple et $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$

avec $p=0$, $q=1$

Donc $\mathrm{Res}(f, a) = \frac{g(a)}{h'(a)}$

Exemple Calcul :

1° $\text{Res}\left(\frac{1-\cos z}{z}, 0\right)$

$p = 2$ $\Rightarrow$ Point Singulier apparent

$q = 1$ $\Rightarrow a_{-1} = 0$.

2° $\text{Res}\left(\frac{1}{z^6-1}, j\right)$ $\qquad e^{i\frac{2\pi}{3}} = j$

$g = 1$

$h = z^6 - 1$ (6 racines)

$\left.\begin{array}{l} p=0 \\ q=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Res}\left(\frac{1}{z^6-1}, j\right) = \frac{g(j)}{h'(j)}$

$h(z) = z^6 - 1$ $\Rightarrow \text{Res}\left(\frac{1}{z^6-1}, j\right) = \frac{1}{6j^5}$

$h'(z) = 6z^5$

3° $\text{Res}\left(\frac{1+z}{(z-1)(z+2)(z+3)}, 1\right)$

$p = 0$ $\qquad h(z) = (z-1)$

$q = 1.$ $\qquad g(z) = \frac{1+z}{(z+2)(z+3)}$

$\text{Res}\left(\frac{1+z}{(z^6-1)(z+2)(z+3)}, 1\right) = \frac{g(1)}{h'(1)} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$.

$h'(z) = 1$.

Dérivée Logarithmique.

$f(z) = \frac{u(z)}{v(z)}$

- $f = \frac{u}{v}$

$\ln f = \ln u - \ln v$

$$(\ln f)' = (\ln u - \ln v)'$$

$$\frac{f'}{f} = \frac{u'}{u} - \frac{v'}{v}$$

$$f' = f\left(\frac{u'}{u} - \frac{v'}{v}\right)$$

• $f = uv$

$$(\ln f)' = (\ln u + \ln v)'$$

$$\frac{f'}{f} = \frac{u'}{u} + \frac{v'}{v}$$

$$f' = f\left(\frac{u'}{u} + \frac{v'}{v}\right)$$

Théorème : Théorème des Résidus.

$f : A \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorphe et P un lacet simple.

$$\oint_P f(z)\,dz = 2i\pi \sum \mathrm{Res}(f, a_k)$$

avec a_k, points singuliers à l'intérieur du contour.

Exemple

$$\oint_{C(i,\sqrt{e})} \frac{1}{z^6 - 1}\,dz$$

* Les pts singuliers : $1 ; -1 ; j, j^2, -j, -j^2$
* $|i-1| = \sqrt{2} < \sqrt{e}$;
  Donc 1 est à l'intérieur de $C(i ; \sqrt{e})$
* $|i - j| = \left|i + \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right| = \left|\frac{1}{2} + i\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right| = \_\_ < \sqrt{e}$
  Donc à l'interieur de $C(i, \sqrt{e})$
* $|i + j| = \_\_\_ > \sqrt{e}$ Donc à l'ext de $C(i, \sqrt{e})$

De m̄ pour le reste des points

Les points singuliers ā l'interieur sont

$1 \; ; \; -1 \; ; \; j \; ; \; -j^2$

Théorème des Résidus:

$f : A \to \mathbb{C}$ holomorphe et Γ un lacet simple alors:

$$\oint_{\Gamma} f(z)\,dz = 2i\pi \sum \operatorname{Res}(f, a_k)$$ a_k: points singuliers à l'interieur du contour

1) Ex1

$$\oint \frac{1}{z^6-1}\,dz$$

$z^6 - 1 = 0$

$\Rightarrow z = 1; -1; j; -j; j^2; -j^2$

Ce sont les pts singuliers

$|i-1| = \sqrt{2} < \sqrt{e} \longrightarrow 1$ à l'interieur du cercle

$|i-j| = |i + \frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}| = |\frac{1}{2} + i(1-\frac{\sqrt{3}}{2})| < \sqrt{e}$

$|i+j| > \sqrt{e}$ Les pts singuliers à l'interieur sont $[1; -1; j; -j^2]$

$$\oint_{C(i,\sqrt{e})} \frac{1}{z^6-1}\,dz = 2i\pi\,[\operatorname{Res}(f,1) + \operatorname{Res}(f,-1) + \operatorname{Res}(f;j) + \operatorname{Res}(f,-j^2)]$$

- $\operatorname{Res}(f,1) = \frac{g(1)}{h'(1)} = \frac{1}{6 \times 1^5} = 1/6$ ($p=0$, $q=1$)

- $\operatorname{Res}(f;-1) = \frac{g(-1)}{h'(-1)} = \frac{1}{6 \times (-1)^5} = -1/6.$

- $\operatorname{Res}(f,j) = \frac{g(j)}{h'(j)} = \frac{1}{6 \times j^5}$

$\cdot \operatorname{Res}(f; -j^2) = \dfrac{g(j^2)}{h'(j^2)} = \dfrac{1}{6j^{10}}$

$$\Rightarrow \oint_{C(1;\sqrt{2})} \frac{1}{z^6-1}\,dz = 2i\pi\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6j^5} + \frac{1}{6j^{10}}\right)$$

2) Ex:

$$\oint_{C(0,3/2)} \frac{z^2(z-3)}{(z^2-1)(z^2+z-2)(z^2+1)}$$

Les pts singuliers sont : $\{1; -1; -2; i; -i\}$

$|0-1| = 1 < 3/2$

$|0+1| = 1 < 3/2$

$|0+2| = 2 > 3/2$

$|0-i| = 1 < 3/2$

$|0+i| = 1 < 3/2$

$\Rightarrow$ les pts singuliers sont $\{1; -1; i; -i\}$

$\cdot \operatorname{Res}(f; -1) = \dfrac{g(-1)}{h'(-1)} = -1/2$ avec $g(z) = \dfrac{z^2(z-3)}{(z-1)(z^2+z-2)(z^2+1)}$

$\cdot \operatorname{Res}(f, i) = \dfrac{g(i)}{h'(i)}$

$\rightarrow g(z) = \dfrac{z^2(z-3)}{(z^2-1)(z^2+z-2)(z+i)}$ $\quad h(z) = z - i$

donc $\operatorname{Res}(f, i) = -i/4$.

$\cdot \operatorname{Res}(f, 1) = \lim\limits_{z \to 1} \dfrac{((z-1)^2 f(z))'}{1!}$

$$= \lim_{z\to 1} \left(\frac{z^2(z-3)}{(z+1)(z+2)(z^2+1)} \right)'$$

$$= \frac{1(1-3)}{(1+1)(1+2)(1+1)} \times \lim_{z\to 1} \left[\frac{2z}{z^2} + \frac{1}{z-3} - \frac{1}{z+1} - \frac{1}{z+2} - \frac{2z}{z^2+1} \right]$$

$$= -1/6 \times \left(\frac{2}{1} + \frac{1}{-2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{2}{3} \right) = 1/18$$

$$\oint f(z)\,dz = 2i\pi \left(-\frac{1}{2} - \frac{i}{4} + \frac{i}{4} + \frac{1}{18} \right) = \frac{-8i\pi}{9}$$

$$\boxed{\mathrm{Res}(f,-i) = \frac{g(-i)}{h'(-i)} = i/4}$$

$$* \oint_{\mathcal{C}(1+i;\,3/2)} \frac{z+1}{(z^3-1)(z^2+4)(z^2+iz-1-i)}\,dz$$

. Les pts singuliers sont $\{+1;\ j;\ j^2;\ 2i;\ -2i;\ 1;\ -1-i\}$

. Les pts singulier à l'intérieur $[1;\ 2i]$

. $\underset{p=0,\ q=1}{\mathrm{Res}}(f, 2i) = g(2i)/h'(2i)$

$$g(z) = \frac{z+1}{(z^3-1)(z+2i)(z^2+iz-1-i)} \qquad h(z) = z - 2i$$

$$\longrightarrow \quad = \frac{2i+1}{4(-57-i)}$$

. $\mathrm{Res}(f, 1) = \lim_{z\to 1} \frac{\left((z-1)^1 \cdot f(z)\right)}{1!}$

$$= \lim_{z \to 1} \frac{(z+1)}{(z-j)(z-j^2)(z^2+4)(z+1+i)}$$

$$= \frac{2}{(1-j)(1-j^2)(1+4)(1+1+i)} \times \lim_{z \to 1} \left[\frac{1}{z+i} - \frac{1}{z-j} - \frac{1}{z-j^2} - \frac{2z}{z^2+4} - \frac{1}{z+n} \right.$$

$$= \frac{-24+17i}{375}$$

Chap 2 Transformée de Laplace

Soit f une fonction réelle à variable réelle

On considère $\mathcal{L}f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$

$$p \longrightarrow \mathcal{L}f(p) = \int_0^\infty f(t)\, e^{-pt}\, dt$$

$\mathcal{L}f$ s'appelle transformée de Laplace de f

<u>Ex:</u> • Calculer la transformée de Laplace de $f(t) = 1$

$$\int_0^\infty e^{-pt} = -\frac{1}{p} e^{-pt}\Big]_0^\infty = -\frac{1}{p}(0-1) = \frac{1}{p} \qquad \boxed{\mathcal{L}_1(p) = \frac{1}{p}} \quad (1)$$

• Pour $f(t) = e^{at}$:

$$\mathcal{L}f(p) = \mathcal{L}_{e^{at}}(p) = \int_0^\infty e^{at} e^{-pt}\, dt = -\frac{1}{p-a} e^{-(p-a)t}\Big]_0^\infty$$

$$= \frac{1}{p-a}$$

$$\boxed{\mathcal{L}_{e^{at}}(p) = \frac{1}{p-a}} \quad (2)$$

• Linéarité de $\mathcal{L}f$: $\mathcal{L}f$ est linéaire

$$\mathcal{L}_{f+g}(p) = \int_0^\infty (f+g)e^{-pt}\, dt = \int_0^\infty f e^{-pt}\, dt + \int_0^\infty g e^{-pt}\, dt = \mathcal{L}f + \mathcal{L}g$$

<u>Ex:</u> • $\mathcal{L}_{(1+e^t)^2} = \mathcal{L}_1(p) + \mathcal{L}_{2e^t}(p) + \mathcal{L}_{e^{2t}}(p)$

$$= \frac{1}{p} + 2\mathcal{L}_{e^t}(p) + \frac{1}{p-2}$$

$$= \frac{1}{p} + \frac{2}{p-1} + \frac{1}{p-2}$$

• $\mathcal{L}_{t^n}(p) = \int_0^\infty t^n e^{-pt}\, dt$ Intégration par partie:

$u = t^n$ $du = n t^{n-1} dt$

$dv = e^{-pt} dt$ $v = -\frac{1}{p} e^{-pt}$ $\Longrightarrow$ $\mathcal{L}_{t^n}(p) = uv] - \int v\, du$

$$= -\frac{t^n}{p} e^{-pt}\Big]_0^\infty - \int -\frac{1}{p} e^{-pt} \times n t^{n-1}\, dt$$

$$= 0 + \frac{n}{p} \int_0^\infty t^{n-1} e^{-pt}\, dt$$

$$\boxed{\mathcal{L}_{t^n}(p) = \frac{n}{p}\,\mathcal{L}_{t^{n-1}}(p)} \quad (3)$$

Ex : $\mathcal{L}_{t}(p) = \frac{1}{p} \times \mathcal{L}_{1}(p) = \frac{1}{p} \times \frac{1}{p} = \frac{1}{p^2}$

$\mathcal{L}_{t^2}(p) = \frac{2}{p}\,\mathcal{L}_{t}(p) = \frac{2}{p^3}$

$\mathcal{L}_{t^3}(p) = \frac{3}{p}\,\mathcal{L}_{t^2}(p) = \frac{3 \times 2}{p^4}$

On remarque que, par récurrence :

$$\boxed{\mathcal{L}_{t^n}(p) = \frac{n!}{p^{n+1}}} \quad (4)$$

- Ayant $\mathcal{L}_{e^{at}}(p) = \frac{1}{p-a}$

Transformée des fonctions hyperboliques :

$$\mathcal{L}_{ch(at)}(p) = \mathcal{L}_{\frac{e^{at}+e^{-at}}{2}}(p) = \frac{1}{2}\,\mathcal{L}_{e^{at}}(p) + \frac{1}{2}\,\mathcal{L}_{e^{-at}}(p)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-a}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p+a}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{p+a+p-a}{p^2-a^2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{2p}{p^2-a^2}$$

$$\boxed{\mathcal{L}_{ch(at)}(p) = \frac{p}{p^2-a^2}} \quad (5)$$

De même

$$\boxed{\mathcal{L}_{sh(at)}(p) = \frac{a}{p^2-a^2}} \quad (6)$$

Transformée des fonctions trigonométriques :

- $\mathcal{L}_{\cos(at)}(p) = \mathcal{L}_{ch(iat)}(p) = \frac{p}{p^2-(ia)^2} = \frac{p}{p^2+a^2}$ (7)

- $\mathcal{L}_{\sin(at)}(p) = \mathcal{L}_{\frac{sh(iat)}{i}}(p) = \frac{1}{i}\,\mathcal{L}_{sh(iat)}(p) = \frac{1}{i}\,\frac{ia}{p^2+a^2} = \frac{a}{p^2+a^2}$ (8)

$$\frac{d}{dp}(\mathcal{L}_f) = \frac{d}{dp}\int_0^\infty f e^{-pt}\,dt = \int_0^\infty \frac{d}{dp}(f e^{-pt})\,dt$$

$$= \int_0^\infty - t f_{(t)} e^{-pt}\,dt$$

$$= -\mathcal{L}_{tf}(P)$$

donc $\boxed{(\mathcal{L}_f(P))' = -\mathcal{L}_{tf_{(t)}}(P)}$ 9

$\boxed{(\mathcal{L}_f(P))^{(n)} = (-1)^n \mathcal{L}_{t^n f_{(t)}}(P)}$ 10

- $\mathcal{L}_{f'(t)}(P) = \int_0^\infty f'(t)\, e^{-pt}\,dt$ Intégration par partie

$u = e^{-pt}$ $du = -p e^{-pt}\,dt$

$dv = f'(t)\,dt$ $v = f(t)$

$$\mathcal{L}_{f'(t)}(P) = \left[e^{-pt} f(t)\right]_0^\infty - \int_0^\infty f(t) \times (-p e^{-pt})\,dt$$

$$= -f(0) + p\int_0^\infty f(t)\, e^{-pt}\,dt$$

$\boxed{\mathcal{L}_{f'(t)}(P) = p\,\mathcal{L}_f(P) - f(0)}$ 11

Calculer les transformées de Laplace des fonctions suivantes:

$f(t) = t\sin(3t)$

- $\mathcal{L}_{t\sin(3t)}(P) = (\mathcal{L}_{tf(t)}(P)) = -(\mathcal{L}_{f(t)}(P))'$ d'après 9

$$= -(\mathcal{L}_{\sin(3t)}(P))'$$

$$= -\left(\frac{3}{p^2+9}\right)'$$ d'après 8

- $\mathcal{L}_{t^2 e^{-2t}}(P) = (-1)^2 (\mathcal{L}_{e^{-2t}}(P))''$ 10 $= 1 \times \left(\frac{1}{p+2}\right)''$ 2

$$\mathcal{L}_{f(t)e^{at}}(p) = \int_0^\infty f(t)\, e^{at}\, e^{-pt}\, dt$$

$$= \int_0^\infty f(t)\, e^{-(p-a)t}\, dt$$

$$\boxed{\mathcal{L}_{f(t)e^{at}}(p) = \mathcal{L}_{f(t)}(p-a)} \quad (12)$$

- $\mathcal{L}_{t^6 e^{-t}}(p) = \mathcal{L}_{t^6}(p+1) \; (12) = \dfrac{6!}{(p+1)^{6+1}} \; (4) = \dfrac{6!}{(p+1)^7}$

- $\mathcal{L}_{\sin(3t)\, e^{-2t}}(p) = \mathcal{L}_{\sin(3t)}(p+2) \; (12) = \dfrac{3}{(p+2)^2+9} \; (8)$

- $\mathcal{L}_{t e^{2t}\cos(4t)}(p) = \mathcal{L}_{t\cos(4t)}(p-2) \; (12)$

$$= -\left(\mathcal{L}_{\cos(4t)}(p-2)\right)' \quad (9)$$

$$= -\left(\frac{(p-2)^2}{(p-2)^2+16}\right)' \quad (7)$$

Transformée inverse

Si $\mathcal{L}_f = F$, on a $\boxed{f = \mathcal{L}^{-1}_F}$ (13)

$\mathcal{L}^{-1}_{\frac{1}{p}} = 1$ ayant $\mathcal{L}_1(p) = \frac{1}{p}$ (1)

$\mathcal{L}^{-1}_{\frac{1}{p^2}} = t$ ayant $\mathcal{L}_t(p) = \frac{1!}{p^{1+1}} = \frac{1}{p^2}$ (4)

$\mathcal{L}^{-1}_{\frac{1}{p^2+1}} = \sin(t)$ ayant $\mathcal{L}_{\sin(t)}(p) = \frac{1^2}{p^2+1^2} = \frac{1}{p^2+1}$ (8)

$\mathcal{L}^{-1}_{\frac{1}{p(p+1)}} \Rightarrow \frac{1}{p(p+1)} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}$

$\mathcal{L}^{-1}_{\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}} = \mathcal{L}^{-1}_{\frac{1}{p}} - \mathcal{L}^{-1}_{\frac{1}{p+1}} = 1 - e^{-t}$

$\mathcal{L}^{-1}_{\frac{1}{p(p^2+1)}} = \mathcal{L}^{-1}_{\frac{1}{p}} - \mathcal{L}^{-1}_{\frac{p}{p^2+1}} = 1 - \cos t$

Transformée de Bromwitch (méthode 2 pour le calcul de $\mathcal{L}_f^{-1}$)

$$\boxed{\mathcal{L}^{-1}_{F}(p) = \sum_{\substack{\text{points} \\ \text{singuliers} \\ \text{de } F(z)}} \left[F(z)e^{zt}\right]}$$ 14

Ex: • $\mathcal{L}^{-1}_{\frac{1}{p(p+1)}} = \text{Res}\left(\frac{e^{zt}}{z(z+1)}, 0\right) + \text{Res}\left(\frac{e^{zt}}{z(z+1)}, -1\right)$

0 et -1 sont des pôles simples avec $p=0$ et $q=1$

donc $\text{Res}\left(F(z)e^{zt}, 0\right) = \frac{g(0)}{h'(0)}$

en posant $g_{(z)} = \frac{e^{zt}}{z+1}$ et $h(z) = z$

$g(0) = 1$ et $h'(0) = 1$

$\text{Res}\left(F(z)e^{zt}, 0\right) = 1$

$\text{Res}\left(F(z)e^{zt}, -1\right) = \frac{g(-1)}{h'(-1)}$

En posant $g_{(z)} = \frac{e^{zt}}{z}$ et $h(z) = z+1$

$g(-1) = -e^{-t}$ $h'(-1) = 1$

$\text{Res}\left(F(z)e^{zt}, -1\right) = -e^{-t}$

Donc $\mathcal{L}^{-1}_{\frac{1}{p(p+1)}} = 1 - e^{-t}$

• $\mathcal{L}^{-1}_{\frac{1}{(p-1)^3}} = \text{Res}\left(\frac{e^{zt}}{(z-1)^3}, 1\right) = \lim_{z\to 1} \frac{\left((z-1)^3 \frac{e^{zt}}{(z-1)^3}\right)''}{2!}$

$= \lim_{z\to 1} \frac{(e^{zt})''}{2}$

$= \frac{t^2 e^t}{2}$

$$\mathcal{L}^{-1}\frac{p}{(p^2+1)^2} = \underbrace{\text{Rés}\left(\frac{z e^{zt}}{(z^2+1)^2}, i\right)}_{A} + \underbrace{\text{Rés}\left(\frac{z e^{zt}}{(z^2+1)^2}, -i\right)}_{B}$$

$$A = \lim_{z \to i} \left((z-i)^2 \frac{z e^{zt}}{(z-i)^2 (z+i)^2} \right)'$$

$$= \lim_{z \to i} \left(\frac{\cancel{(z-i)^2}\, z e^{zt}}{\cancel{(z-i)^2}(z+i)^2} \right)' = \lim_{z \to i} \left(\frac{z e^{zt}}{(z+i)^2} \right)'$$

dérivée logarithmique : $f' = f\left(\frac{u'}{u} + \frac{v'}{v} - \frac{w'}{w}\right)$

$$= \lim_{z \to i} \left(\frac{i e^{it}}{(i+i)^2} \times \left(\frac{1}{z} + \frac{t\cancel{e^{zt}}}{\cancel{e^{zt}}} - \frac{2\cancel{(z+i)}}{(z+i)^{\cancel{2}}} \right) \right)$$

$$= \lim_{z \to i} \left(\frac{i e^{it}}{(2i)^2} \times \left(\frac{1}{z} + t - \frac{2}{z+i} \right) \right)$$

$$= -it \frac{e^{it}}{4}$$

$$B = \lim_{z \to -i} \left((z+i)^2 \frac{z e^{zt}}{(z-i)^2 (z+i)^2} \right)'$$

$$= \lim_{z \to -i} \left(\frac{z e^{zt}}{(z-i)^2} \right)'$$

$$= \frac{-i e^{-it}}{(-i-i)^2} \times \lim_{z \to -i} \left(\frac{1}{z} + \frac{t\cancel{e^{zt}}}{\cancel{e^{zt}}} - \frac{2\cancel{(z-i)}}{(z-i)^{\cancel{2}}} \right)$$

$$= \frac{i t e^{-it}}{4}$$

$$\mathcal{L}^{-1}_F = A + B$$

Résolution équation différentielle :

$$y'' + y' - 2y = 0 \qquad y(0) = 1 \qquad y'(0) = 2$$

$$\mathcal{L}_{y''} = p\,\mathcal{L}_{y'}(p) - y'(0) = p\left(p\,\mathcal{L}_y(p) - y(0)\right) - y'(0)$$

$$= p^2\,\mathcal{L}_y(p) - p\,y(0) - y'(0)$$

$$\mathcal{L}_{y'} = p\,\mathcal{L}_y(p) - y(0)$$

$$\mathcal{L}(y'' + y' - 2y) = \mathcal{L}_0 = 0$$

$$\mathcal{L}_{y''} + \mathcal{L}_{y'} - 2\,\mathcal{L}_y = 0$$

$$p^2\,\mathcal{L}_y(p) - p\,y(0) - y'(0) + p\,\mathcal{L}_y(p) - y(0) - 2\,\mathcal{L}_y(p) = 0$$

$$(p^2 + p - 2)\,\mathcal{L}_y = p\,y(0) + y'(0) + y(0)$$

$$\mathcal{L}_y = \frac{p + 2 + 1}{p^2 + p - 2} = \frac{p+3}{p^2 + p - 2}$$

$$\mathcal{L}_y = \frac{p+3}{(p-1)(p+2)} = \frac{4}{3(p-1)} - \frac{1}{3(p+2)}$$

$$y = \mathcal{L}^{-1}_{\frac{4}{3(p-1)}} - \mathcal{L}^{-1}_{\frac{1}{3(p+2)}}$$

$$= \frac{4}{3}\,\mathcal{L}^{-1}_{\frac{1}{p-1}} - \frac{1}{3}\,\mathcal{L}^{-1}_{\frac{1}{p+2}}$$

$$= \frac{4}{3}\,e^{+t} - \frac{1}{3}\,e^{-2t}$$

$$y'' + 2y' + y = e^{-t} \qquad y(0)=1 \qquad y'(0)=1$$

$$p^2 \mathcal{L}_y - p\,y(0) - y'(0) + 2p\,\mathcal{L}_y - 2y(0) + \mathcal{L}_y = \mathcal{L}_{e^{-t}}$$

$$(p^2 + 2p + 1)\,\mathcal{L}_y - p - 1 - 2 = \frac{1}{p+1}$$

$$\mathcal{L}_y = \frac{1}{(p+1)(p+1)^2} + \frac{p+3}{(p+1)^2}$$

$$\mathcal{L}_y = \frac{(p+3)(p+1) + 1}{(p+1)^3} = \frac{(p+2)^2}{(p+1)^3}$$

$$y = \mathcal{L}^{-1}_{\frac{(p+2)^2}{(p+1)^3}}$$

$$\mathcal{L}^{-1}_{\frac{(p+2)^2}{(p+1)^3}} = \operatorname{Res}\left(\frac{(z+2)^2}{(z+1)^3} e^{zt}, -1\right)$$

$$= \lim_{z \to -1} \frac{\left(\cancel{(z+1)^3}\,\dfrac{e^{zt}}{\cancel{(z+1)^3}} \times (z+2)^2\right)''}{2}$$

$$= \lim_{z \to -1} \left((z+2)^2 e^{zt}\right)'' = e^{-t}\left(1 + 2t + \frac{t^2}{2}\right)$$

Rappel DES

$$\frac{1}{(x-a)(x-b)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b}$$

- Pour trouver A on multiplie par $(x-a)$ et on pose $x=a$

$$\frac{1}{x-b} = A + B\frac{(x-a)}{(x-b)}$$

$$A = \frac{1}{a-b}$$

- Pour trouver B on multiplie par $(x-b)$ et on pose $x=b$

$$\frac{1}{x-a} = A\frac{(x-b)}{(x-a)} + B$$

$$B = \frac{1}{b-a}$$

Appendice

① $\mathcal{L}_1(p) = \frac{1}{p}$

② $\mathcal{L}_{e^{at}} = \frac{1}{p-a}$

③ $\mathcal{L}_{t^n}(p) = \frac{n}{p}\mathcal{L}_{t^{n-1}}(p)$

④ $\mathcal{L}_{t^n}(p) = \frac{n!}{p^{n+1}}$

⑤ $\mathcal{L}_{ch(at)}(p) = \frac{p}{p^2-a^2}$

⑥ $\mathcal{L}_{sh(at)}(p) = \frac{a}{p^2-a^2}$

⑦ $\mathcal{L}_{\cos(at)}(p) = \frac{p}{p^2+a^2}$

⑧ $\mathcal{L}_{\sin(at)}(p) = \frac{a}{p^2+a^2}$

⑨ $\left(\mathcal{L}_f(p)\right)' = -\mathcal{L}_{tf(t)}(p)$

⑩ $\left(\mathcal{L}_f(p)\right)^{(n)} = (-1)^n \mathcal{L}_{t^n f(t)}(p)$

⑪ $\mathcal{L}_{f'(t)}(p) = p\,\mathcal{L}_f(p) - f(0)$

⑫ $\mathcal{L}_{f e^{at}}(p) = \mathcal{L}_f(p-a)$

⑬ $\left[\mathcal{L}^{-1}_F = f \quad \text{si} \quad \mathcal{L}_f = F\right]$

⑭ $\mathcal{L}^{-1}_F(p) = \sum_{PS\ de\ F(z)} \left[F(z)\, e^{zt}\right]$