Cours

Algèbre II

SPE

Semestre 1

Chapitre 2: Diagonalisation

⁝1 – Matrices Diagonalisables :

Une matrice $A = (a_{ij})$ est diagonale si tous ses coefficients en dehors de la diagonale sont nuls :

$$\forall\, i \neq j,\ a_{ij} = 0$$

Elle est donc de la forme :

$$A=\begin{pmatrix} \alpha_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \alpha_k & \vdots \\ 0 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix}$$

∗**Propriétés principales** :

1) Le déterminant d'une matrice diagonale est le produit des coefficients diagonaux $|A| = \alpha_1 \alpha_2 \ldots . \alpha_n$

2) Le produit de deux matrices diagonales est une diagonale.

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} u_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1\alpha_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & u_2\alpha_n \end{pmatrix}$$

3) Si tous les coefficients diagonaux sont nuls, alors la matrice est inversible.

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \frac{1}{\alpha_n} \end{pmatrix}$$

La puissance X^{ème} d'une matrice diagonale est :

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix}^{X} = \begin{pmatrix} {\alpha_1}^X & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & {\alpha_n}^X \end{pmatrix}$$

∗**Définition :** Une matrice A est dite diagonalisable si elle est semblable à une matrice diagonale, c'est-à-dire qu'il existe une matrice P inversible telle que $P^{-1} \times A \times P = D$

Exemple :

$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ est diagonalisable dans $M_2(\mathbb{R})$.

En effet, $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

On a $P^{-1} \times A \times P = D$, avec $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

Remarque : Diagonaliser une matrice revient à trouver P, P^{-1} et D.

∗**Définition :** Soit E un k-ev de dimension n, et f un endomorphisme de E, on dit que f est diagonalisable s'il existe une base B de E telle que la matrice de f dans cette base est diagonale.

⁝2 – Valeurs propres et vecteurs propres :

∗**Définition :** Soit E un k-ev et soit f un endomorphisme de **E** :

1) On dit que le scalaire λ ∈ K est une valeur propre de f si :
$\exists\, V \in E\, ;\, f(V) = \lambda \times V$

2) Un tel vecteur est appelé vecteur propre de f associé à λ.

3) L'ensemble des valeurs propres de f s'appelle le spectre de f dans K. On le note Sp(f)

4) Soient $A \in M_n(K)$ *et* $\lambda \in K$. On dit que λ est une valeur propre de A s'il existe un vecteur colonne $V \neq 0$, tel que $A \times V = \lambda \times V$

∗**Proposition:** Soit **E** un k-ev et f un endomorphisme de E et λ un élément de K.

Les conditions suivantes sont alors équivalentes :

- i) λ est une valeur propre de E
- ii) $\exists\, V \in E \setminus \{0\}\, ;\, f(V) = \lambda \times V$
- iii) $\ker(f - \lambda id_E) \neq \{0\}$
- iv) $f - \lambda id_E$ n'est pas injective

⁝3 – Sous-espace propre d'un endomorphisme:

∗**<u>Définition :</u>** Pour λ valeur propre de f on note :

$$E_\lambda = \{v \in E\ ; f(v) = \lambda \times v$$
$$= \boxed{\ker(\mathrm{f} - \lambda id_E)}$$

E_λ est un sous-espace vectoriel non nul de E appelé sous-espace propre de f associé à la valeur propre λ.
La dimension de E_λ s'appelle la multiplicité géométrique de λ :
On note $m_g(E_\lambda) = dim(E_\lambda)$

<u>Exemple :</u> $A = \begin{pmatrix} 11 & 3 \\ -18 & -4 \end{pmatrix}$

<u>Q :</u> Trouver les valeurs propres de f et déterminer les sous-espaces propres.
<u>R :</u> Soit λ une valeur propre.
$\exists\, v \neq 0;\ A \times v = \lambda \times v$
$A \times v - \lambda \times v = 0$
$(A - \lambda I_2) \times v = 0$
Si on multiplie par $(A - \lambda I_2)^{-1}$ (l'inverse), on obtient $v = 0$. Or $v \neq 0$:
D'où $A - \lambda I_2$ n'est pas inversible.
Alors, $\det(A - \lambda I_2) = 0$
$|A - \lambda I_2| = 0$
$|A - \lambda I_2| = \begin{vmatrix} 11 - \lambda & 3 \\ -18 & -4 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0$
$\rightarrow\ \lambda_1 = 5\ \ et\ \ \lambda_2 = 2$
Les sous-espaces propres associés à λ_i sont :
$v = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ $\qquad A \times v = \lambda \times v$

- $(A - \lambda_1 I_2) \times v = 0$

$\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -18 & -9 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0$

$\begin{cases} 6a + 3b = 0 \\ -18a - 9b = 0 \end{cases}$ $\rightarrow$ 2a=-b

$(a, b) = (a, -2a) = a(1, -2)$
$E_{\lambda_1} = \mathbb{R}(1, -2)$

- $(A - \lambda_2 I_2) \times v = 0$

$\begin{pmatrix} 9 & 3 \\ -18 & -6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0$

$\begin{cases} 9a + 3b = 0 \\ -18a - 6b = 0 \end{cases}$ $\rightarrow$ 3a=-b

$(a, b) = (a, -3a) = a(1, -3)$
$E_{\lambda_2} = \mathbb{R}(1, -3)$
Par suite, on a: $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$ $\qquad D = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

∗**<u>Exercice Supplémentaire :</u>**
Soit la matrice $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & -3 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$
Soit λ un vecteur propre.
$|B - \lambda I_3| = 0$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 2 & -3 \\ -1 & 3 - \lambda & -3 \\ -2 & 2 & -2 - \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\lambda & 2 & -3 \\ \lambda - 1 & -\lambda + 1 & 0 \\ \lambda - 1 & 0 & 1 - \lambda \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{matrix} = (\lambda - 1)^2 \times \begin{vmatrix} -\lambda & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2 \times \begin{vmatrix} -\lambda & 2 & -3 - \lambda \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$C_3 \leftarrow C_3 + C_1$

$= (\lambda - 1)^2[2 + (-3 - \lambda)] - (\lambda - 1)^2(\lambda + 1) = 0$ $\qquad \lambda_1=1$

$\lambda_2=-1$

Sp(B) = {-1,1}

$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
(puisque 1 est une racine double de l'équation du second degré)

- $E_{-1} = \ker(\mathrm{B} + I_3)$

$$(B + I_3) \times \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0 \qquad \begin{cases} a + 2b - 3c = 0 \\ -a + 4b - 3c = 0 \\ -a + 2b - c = 0 \end{cases} \quad \rightarrow a = b = c \quad \rightarrow \quad a(1{,}1{,}1)$$

$$E_{-1} = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- $E_1 = \ker(\mathrm{B} - I_3)$

$$(B - I_3) \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \qquad \begin{cases} -x + 2y - 3z = 0 \\ -x + 2y - 3z = 0 \\ -a + 2y - 3z = 0 \end{cases} \quad \rightarrow x = 2y + 3z \quad \rightarrow (x, y, z) = (2x + 3z, y, z) = y(2{,}1{,}0) + z(3{,}0{,}1)$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad P = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

∗***Remarque :***
On peut écrire D de la forme :

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

à condition de garder le même ordre quand on va écrire la matrice de passage.

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

∗**Théorème :** Si $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_p$ sont des valeurs propres distinctes deux à deux, dans les sous-espaces vectoriels $E_{\lambda_1}, E_{\lambda_2} \ldots E_{\lambda_p}$ sont en somme directe :

$$\sum_{i=1}^{p} E_{\lambda_i} = \bigoplus E_{\lambda_i}$$

⁞4 – Polynôme Caractéristique :

∗**Définition :** On appelle polynôme caractéristique de la matrice A, et on note $P_a(X)$ le déterminant de la matrice : $\cdots \ddots \vdots$

$$P_a(X) = |A - XI_a| = \begin{vmatrix} a_{11} - X & \cdots & 0 \\ \vdots & a_{22} - X & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{nn} - X \end{vmatrix}$$

Nous remarquons que si λ est une valeur propre de A alors λ est une racine du polynôme caractéristique.
λ est une valeur propre de A $\leftrightarrow$ λ est une racine de $P_A(X)$

∗**Définition :** Soit A une matrice de $M_n(K)$ (matrice carrée), alors :

$$P_A(X) = |A - XI_n| = (-1)^n X^n + (-1)^{n-1} Tr(A) X^{n-1} + \cdots + \det(A),$$

où $Tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}$

∗***Remarque :*** Deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique. Or si A est diagonalisable elle est semblable à une matrice diagonale.

$$P_A(X) = P_D(X) = (-1)^n \prod_{i=1}^{n} (X - \lambda_i)^{m_i}$$

avec les λ_i racines de $P_A(X)$ et m_i leurs multiplicités.

∗***Remarque :*** (Pratique de la diagonalisation) :

1) Factoriser le polynôme caractéristique.
2) Trouver une base de chaque sous-espace propre.
3) Trouver la matrice de passage et calculer son inverse.
4) Vérifier les calculs.

⁞5 – Caractérisation des endomorphismes diagonalisables.

∗**Définition :** On dit qu'un polynôme est scindé s'il admet effectivement n racines (comptées avec leur ordre de multiplicité).

$$P_f(X) = (-1)^n \prod_{i=1}^{k} (X - \lambda_i)^{m_i} \qquad (m_i + \cdots + m_k = n)$$

∗**Théorème :** Soit E un k-ev de dimension n et f un endomorphisme de E. Les conditions suivantes sont équivalentes :

i) f est diagonalisable
ii) Le polynôme caractéristique $P_f(X)$ est scindé dans K, et pour toute valeur propre λ, le sous-espace propre E_λ a pour dimension l'ordre de multiplicité de λ.
iii) E admet une base formée par des vecteurs propres de E.

iv) E est somme directe de sous-espace propre de f.
$E = \bigoplus E_\lambda$ (avec $\lambda \in sp(f)$)
v) La somme des dimensions de sous-espace propre de f est égale à celle de E
$\rightarrow \dim(E) = \sum_\lambda \dim(E_\lambda)$

∗**<u>Corollaire :</u>** Si une matrice $n \times m$ a exactement n valeurs propres distincts, alors elle est diagonalisable.
<u>Preuve :</u> La matrice A admet n sous-espaces propres
E_{λ_i} en somme directe :
On a $\dim(E_{\lambda_i}) \geq 1$
Donc $\sum \dim(E_{\lambda_i}) \geq n$

$$n \leq \sum \dim(E_{\lambda_i}) = \dim \bigoplus E_{\lambda_i} \leq \dim(E) = n$$

Or $\bigoplus E_{\lambda_i}$ est un sous-espace vectoriel de E donc $E = \bigoplus E_\lambda$, et alors A est diagonalisable.

❖ **<u>Polynômes d'endomorphisme :</u>**

1 ~ Sous-espace vectoriel stable par endomorphisme.
∗**<u>Définition :</u>** Un sous-espace vectoriel $F \subset$ E est dit stable par f lorsque $f(F) \subset F$, c'est-à-dire :
$\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{F}, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \in \boldsymbol{F}$

∗**<u>Proposition :</u>** Soient f et g deux endomorphismes qui commutent ($f \circ g = g \circ f$), alors Imf et $kerf$ sont stables par g.
$\forall x \in kerf, \quad f(x) = 0 \rightarrow g(f(x)) = 0 \rightarrow f(g(x)) = 0 \rightarrow g(x) \in kerf$
$x \in Imf \rightarrow \exists y \in E; f(y) = x$
$\rightarrow g(x) = g(f(y)) = f(g(y)) \in Imf \rightarrow g(x) \in Imf$

2 ~ Polynômes d'endomorphisme :
∗**<u>Définition :</u>** Soient $u \in \mathscr{L}(E)$ et $P = a_0 + a_1X + \cdots + a_kX^k \in K[X]$
On définit $P(u) = a_0 1_E + a_1 u + \cdots + a_k u^k$ où les puissances de u sont définies en récurrence en posant $u^0 = 1_E$, $u^1 = u$, $u^2 = u \circ u$ … et $u^{k+1} = u^k \circ u, \ \forall K \in \mathbb{N}$

∗**<u>Proposition :</u>** Soient P et $Q \in K[X]$. Si u est un endomorphisme de E, on a alors :
$P(u) \circ Q(u) = (PQ)(u) = (QP)(u) = Q(u) \circ P(u)$

∗**<u>Proposition :</u>** Soient $u \in \mathscr{L}(E)$ et $P \in K[X]$, alors $kerP(u)$ *et* $ImP(u)$ sont stables par u.
<u>Preuve :</u>
- $kerP(u)$ stable par u:
$x \in kerP(u) \rightarrow P(u)(x) = 0$
Or $u(P(u)(x)) = (u \circ P(u))(x) = (P(u) \circ u)(x) = P(u)(u(x)) = 0$
Par suite, $\boxed{u(x) \in kerP(u)}$
- $ImP(u)$ stable par u:
$x \in ImP(u) \rightarrow \exists y \in E; P(u)(y) = x$
$u(x) = u(P(u)(y))$
$= (P(u) \circ u)(y)$
$= P(u)(u(y)) \in ImP(u)$
$\rightarrow \boxed{u(x) \in ImP(u)}$

∗**<u>Théorème de décomposition des noyaux :</u>**
Si P et Q sont deux polynômes premiers entre eux dans $K[X]$ et u un endomorphisme de E, alors :

$$ker(PQ)(u) = kerP(u) \bigoplus kerQ(u)$$

<u>Preuve :</u> Montrons que $kerP(u) \subset ker(PQ)(u)$
Soit $x \in kerP(x)$
$P(u)(x) = 0$
Or $PQ(u)(x) = (P(u) \circ Q(u))(x) = (Q(u) \circ P(u))(x) = Q(u)(P(u)(x)) = Q(u)(0)$
De même, $kerQ(u) \subset kerPQ(u)$, alors :
$kerP(u) + kerQ(u) \subset kerPQ(u)$
Montrons maintenant que $kerPQ(u) \subset kerP(u) + kerQ(u)$.
Les deux polynômes P et Q sont premiers entre eux d'après le Lemme de Bézout, il existe $S(x)$ et $T(x)$ dans $K[X]$, tel que $SP + TQ = 1$. On a donc :
$S(u)P(x) + T(u)Q(x) = 1_E$
Donc pour tout $x \in ker(PQ)(u)$:

$S(u)\big(P(u)(x)\big) + T(u)\big(Q(u)(x)\big) = x$

On peut écrire : $\quad x = y + z \quad$ avec $y = \big(T(u) \circ Q(u)\big)(x)$ et $z = \big(S(u) \circ P(u)\big)(x)$

Or $P(u)(y) = P(u)\big(T(u) \circ Q(u)\big)(x) = \big(P(u) \circ T(u) \circ Q(u)\big)(x) = \big(T(u) \circ P(u) \circ Q(u)\big)(x) = \big(T(u) \circ (PQ)(u)\big)(x)$

$= T(u)\big(PQ(x)\big) = T(u)(0) = 0$

Par suite, $y \in kerP(u)$. De même, $z \in kerQ(u) \Longrightarrow x = y + z \ \in kerP(u) + kerQ(u)$

$ker(\mathrm{PQ})(u) \subset kerP(u) + kerQ(u)$, d'où l'égalité.

$x \in kerP(u) \cap kerQ(u) \quad \Longrightarrow \quad P(u)(x) = 0$ et $Q(u)(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{x = S(u)(0) + T(u)(0) = 0}$

∗**<u>Théorème :</u>** Soient E un k-ev, u un endomorphisme de E et $P_1, P_2 \dots P_S$ des polynômes premiers entre eux.

$$P = P_1 + P_2 \dots + P_S \Longrightarrow kerP(u) = kerP_1(u) \oplus kerP_2(u) \oplus \dots \oplus kerP_S(u)$$

- **<u>Polynôme minimal d'un endomorphisme:</u>**

∗**<u>Définition :</u>** On appelle polynôme annulateur de u un polynôme P tel que $P(u) = 0$

∗**<u>Définition :</u>** On appelle polynôme minimal u et on note m_u l'unique polynôme unitaire de degré minimal dans $K[X]$ tel que $m_u = 0$

<u>Remarque :</u> m_u est le polynôme annulateur de u unitaire et de plus petit degré.

∗**<u>Proposition :</u>** Soit m_u un polynôme minimal de u. Alors m_u divise tous les polynômes annulateurs de u.

<u>Preuve :</u>

$P(x) = 0$. La division euclidienne de P par m_u donne :

$P = Bm_u + R \qquad$ avec $\deg R < \deg m_u$

$P(u) = B(u)m_u(u) + R(u) = R(u) = 0$

R est un polynôme annulateur de u de degré inférieur à $\deg m_u$

∗**<u>Théorème :</u>** Soient u un endomorphisme d'un k-ev E de dimension finie et m_u son polynôme minimal. Alors le scalaire de K est valeur propre de u si et seulement si $m_u(\lambda) = 0$

Montrons que $\lambda \in Sp(u) \Leftrightarrow m_u(\lambda) = 0$

$\boxed{\Longrightarrow}$Supposons que λ est une valeur propre. Montrons que $m_u(\lambda) = 0$

Soit $m_u(X) = X^P + b_{p-1}X^{p-1} + \dots + b_0 \qquad\qquad b_i \in K$

$m_u(u) = u^P + b_{p-1}u^{p-1} + \dots + b_0 1_E$

Si λ est valeur propre alors $\exists x \neq 0$; $u(x) = \lambda x$

$$m_u(u)(x) = u^P(x) + b_{p-1}u^{p-1}(x) + \dots + b_0(x) = \lambda^P x + b_{p-1}\lambda^{p-1}x + \dots + b_0 x = \big(\lambda^P x + b_{p-1}\lambda^{p-1}x + \dots + b_0\big)x$$
$$= m_u(\lambda)(x) = 0 \Longrightarrow m_u(\lambda) = 0 \qquad (x \neq 0)$$

$\boxed{\Longleftarrow}$Comme $m_u(\lambda) = 0$, on peut écrire $m_u(x) = (x - \lambda)Q(x)$

(avec $Q(x) \in k[x], et \deg Q(x) < \deg m_u(x)$)

Comme m_u est le polynôme minimal de u, $Q(u) \neq 0$

S'il existe $y \in E$; $Q(u)(y) \neq 0$

$$\boxed{0 = m_u(u)(y) = (u - \lambda Id)\big(Q(u)(y)\big) = (u - \lambda Id)(z)}, \quad \text{avec } z \neq 0$$

∗**<u>Théorème :</u>** Un endomorphisme u est diagonalisable si et seulement s'il possède un polynôme annulateur scindé à racines simples.

∗***<u>Théorème de Cayley-Hamilton :</u>***

Soit u un endomorphisme de E, et P_u son polynôme caractéristique. P_u est alors un polynôme annulateur de u.

$\boxed{P_u(u) = 0}$