UNIVERSITE SAINT-JOSEPH
FACULTE D'INGENIERIE
E S I B

*DEPARTEMENT GENIE CIVIL ET ENVIRONNEMENT*

**Le Lundi 21 décembre 2015**

**Semestre S1**
*Bâtiments et ingénierie de l'entreprise*
*Eau et environnement*
*Travaux publics et transports*

# EXAMEN FINAL

## COMPOSITION : TECHNIQUES MATHEMATIQUES POUR L'INGENIEUR

**Documents interdits, Calculatrices interdites**
**Durée : 02h00 – (de 08h00 à 10h00)**

---

**Exercice 1 (11pts)** On pose $z = x + iy$, avec $x, y \in \mathbb{R}$ .on suppose que $f = u + iv$ est une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$.

*a.* Déterminer toutes les fonctions $f$ telles que $g = u^2 + iv^2$ soit holomorphe. *(6pts)*
b. Calculer les diverses valeurs possibles de $i^{1/2}$ , $(1+i)^{3/2}$. *(5pts)*

**Exercice 2 (9pts)**

a. Evaluer l'intégrale par la méthode directe puis en effectuant l'intégration le long du chemin composé de 2 segments joignant $(1-2i)$et $(1+i)$puis $(1+i)$et $(3+i)$.
*(6pts)*

14+19i

$$\int_{1-2i}^{3+i} (2z+3)dz$$

$\frac{b-t}{b-a} z_B + \frac{t-a}{b-a} z_A$

3

b. **Donnez un autre chemin joignant les points (1-2i) et (3+i) sur lequel la valeur de l'intégrale est la même calculée en (a).**
*(3pts)*

**Exercice 3 (5pts)** Développer en série de taylor autour de $z = 0$, la fonction :

$$f(z) = \ln\left(\frac{1+z}{1-z}\right).$$

3

**Exercice 4 (6pts)** Développer en série de Laurent $f(z) = (z-3)\sin\left(\frac{1}{z+2}\right)$ au voisinage de $z = -2$.

3

**Exercice 5 (20pts)** Calculer les intégrales suivantes en utilisant le théorème de résidus.

$$\oint_C \frac{z\ dz}{(z^4+4)}$$ C un cercle d'equation $|z-1-i| = \frac{1}{2}$ . (5pts)

$$\oint_C \frac{z\ dz}{(z+1)(z+2)}$$ $C$ , une courbe n'entourant ni $-1$ ni $-2$ . $= 0$ (2pts) 10

$$\int_{|z|=2} \frac{dz}{\sinh(2z)}$$ (3pts)

$$\oint_C \frac{3z^3+2}{(z-1)(z^2+9)}dz$$ C, une courbe définie par ***a***) $|z-2| = 2$ ***b***) $|z| = 4$. (6pts)

$$\int_{|z|=1} \frac{1}{z(e^z-1)}dz.$$ (4pts)

**Exercice 6 (8pts)**

a. Déterminer la transformée de Laplace de 5
   1. $f(t) = e^{-4t}\sin 5t.$ (1.5pts)
   2. $f(t) = t^2\cos t.$ (1.5pts)

b. Utiliser la transformation de Laplace pour résoudre l'équation différentielle suivante :
$y''(t) + 2y'(t) + 2y(t) = 0$ *conditions initiales* , $y(0) = 1, y'(0) = 1.$ (5pts)

**Exercice 7 (11pts)** 7

a. 1. Déterminer la transformée de Fourier de $f(x) = e^{-|x|}$. (3 pts)
   2. En utilisant la transformée inverse de Fourier, chercher $f(x)$. (3 pts)

6

b. Soient $f$ et $g$ deux fonctions de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continues. On définit $h(x)$ par :

$$h(x) = (f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)dy$$

Montrer que $\mathcal{F}(f * g) = \sqrt{2\pi}\ \mathcal{F}(f)\ \mathcal{F}(g)$ , $\mathcal{F}$ étant la transformée de Fourier. (5pts)