Exercices Supplémentaires

Probabilités et Statistiques

1ère année EM

Semestre 1

Pour Aller Plus Loin!

Les 3 boules! (Examen Final 2012)

Un bac contient 3 boules : la première est entièrement blanche, la seconde est entièrement noire et la troisième est moitié noire et moitié blanche.

Une personne choisit aléatoirement une boule et dit : « La boule que j'ai eu contient la couleur noire ».

Quelle est la probabilité que la boule choisie par cette personne soit la boule moitié noire et moitié blanche ?

Solution :

Après avoir choisi une boule, la personne a 2 possibilités :

1) Evénement A : « Déclarer que la boule contienne la couleur blanche ».
2) Evénement B : « Déclarer que la boule contienne la couleur noire ».

Si la boule choisie est noire, la probabilité de l'événement A est 0 alors que celle de B est 1.

Si la boule choisie est blanche, la probabilité de l'événement A est 1 alors que celle de B est 0.

Si la boule choisie est moitié blanche et moitié noire, la probabilité de A est 0.5(la personne voit la face blanche de la boule) et celle de B est aussi 0.5(la personne voit la face noire de la boule).

Et on sait qu'on a la même probabilité pour avoir une boule blanche, noire ou moitié BN(événements équiprobables) :

$$P(noire) = P(blanche) = P(BN) = \frac{1}{3}$$

Alors la probabilité que la personne déclare qu'elle a eu la couleur noire est :

$$P(B) = P(B \cap noire) + P(B \cap blanche) + P(B \cap BN) = \left(\frac{1}{3} \times 1\right) + \left(\frac{1}{3} \times 0\right) + \left(\frac{1}{3} \times 0.5\right) = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

Finalement la probabilité demandée dans cet exercice est :

$$\boxed{P(moitié|B) = \frac{P(moitié\ \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{3} \times 0.5}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}}$$

Dilemme des 3 portes

Vous êtes sur un jeu télévisé, et vous avez le choix entre trois portes:

Derrière une porte il y a un prix et derrière les deux autres, pas de prix. Vous choisissez une porte et puis le présentateur, qui sait ce qu'il y a derrière les portes, ouvre une autre porte, qui ne contient pas le prix. Il vous dit ensuite: «Voulez-vous changer votre choix ? »

Quel est votre choix et pourquoi ?

Solution :

Ce tableau présente les différentes possibilités après avoir choisi initialement la porte 1.

Porte 1	Porte 2	Porte 3	Porte ouverte par le présentateur	Résultat si on ne change pas de choix	Résultat si on change de choix
Prix	Pas de prix	Pas de prix	Porte 3	**Gagnant**	Perdant
Pas de prix	**Prix**	Pas de prix	Porte 3	Perdant	**Gagnant**
Pas de prix	Pas de prix	**Prix**	Porte 2	Perdant	**Gagnant**

Et ainsi on remarque qu'en changeant de choix on a une probabilité 2/3 de gagner.

Solution par le calcul :

Soient P1, P2, P3 les événements tel que le prix est derrière les portes 1, 2, 3 respectivement et ainsi on a :

P(P1)=P(P2)=P(P3)=1/3

Soit C1 l'événement tel que le joueur choisit la porte 1.

Soit O3 l'événement tel que le présentateur ouvre la porte 3.

Ainsi on retrouve les probabilités suivantes :

$P(O3|P1,C1) = \frac{1}{2}$ $P(O3|P2,C1) = 1$ $P(O3|P2,C1) = 0$ $P(P1|X1) = P(P1)$

$P(P1|X1) = P(P1)$ $P(P1|X1) = P(P1)$

On suppose que le joueur choisit initialement la porte 1 et le présentateur ouvre la porte 3.

La probabilité de gagner par changement de choix est :

On applique le théorème de Bayes :

$$\mathrm{P(P2|O3,C1)} = \frac{\mathrm{P(P2).P(O3|P2,C1)}}{\mathrm{P(P1).P(O3|P1,C1) + P(P2).P(O3|P2,C1) + P(P3).P(O3|P3,C1)}}$$

$$= \frac{\mathrm{P(O3|P2,C1)}}{\mathrm{P(O3|P1,C1) + P(O3|P2,C1) + P(O3|P3,C1)}} = \frac{1}{\frac{1}{2}+1} = \frac{2}{3}$$

Dilemme des 2 prisonniers (Examen Partiel 2015)

Deux prisonniers sont attrapés par la police, ils sont retenus dans deux chambres différentes et ne peuvent pas communiquer. Alors le policier offre à chacun d'eux les choix suivants :

- Si tu dénonces ton complice et qu'il ne te dénonce pas, tu seras remis en liberté et l'autre obtiendra une peine de 10 ans.
- Si tu le dénonces et lui aussi, vous obtiendrez tous les deux une peine de 5 ans.
- Si personne ne dénonce l'autre, vous aurez tous les deux 6 mois de prison.

Quel choix le prisonnier doit faire ?

Solution :

Chacun des prisonniers réfléchit de son côté en considérant les deux cas possibles de réaction de son complice.

- « Dans le cas où il me dénoncerait :
- Si je me tais, je ferai 10 ans de prison ;
- Mais si je le dénonce, je ne ferai que 5 ans. »
- « Dans le cas où il ne me dénoncerait pas :
- Si je me tais, je ferai 6 mois de prison ;
- Mais si je le dénonce, je serai libre. »

Donc le prisonnier a intérêt à dénoncer son complice.

Pari de Pascal (Examen Final 2013)

1) Enoncer le pari de Pascal.

2) Expliquez le raisonnement probabiliste sous-jacent au pari de Pascal.

3) Le pari de Pascal est fondé sur l'existence d'une religion unique. Est-ce que le raisonnement de Pascal peut être adapté au cas où il existe un nombre n fini de religions ?Expliquez.

Solution :

1) "Examinons donc ce point, et disons Dieu est, ou il est pas... Que gagerez-vous?... Il faut parier cela n'est pas volontaire, vous êtes embarqué... Pesons le gain et la perte en prenant croix, que Dieu est.
[…]
Vous avez deux choses à perdre : le vrai et le bien, et deux choses à engager : votre raison et votre volonté, votre connaissance et votre béatitude; et votre nature a deux choses à fuir : l'erreur et la misère. Votre raison n'est pas plus blessée, en choisissant l'un que l'autre, puisqu'il faut nécessairement choisir. Voilà un point vidé. Mais votre béatitude ? Pesons le gain et la perte, en

prenant croix que Dieu est. Estimons ces deux cas : si vous gagnez, vous gagnez tout; si vous perdez, vous ne perdez rien. Gagez donc qu'il est, sans hésiter."

2) b : Les plaisirs libertins $+\infty$: Paradis $-\infty$:Enfer

	Si Dieu existe	Si Dieu n'existe pas	Perte maximale
Pari sur l'existence	$-b+\infty$	$-b+0$	$-b+0=-b$
Pari sur l'inexistence	$+b-\infty$	$+b+0$	$+b-\infty=-\infty$

Si Dieu n'existe pas, le croyant et le non croyant ne perdent rien.
Si Dieu existe, le croyant gagne tout, c'est-à-dire le paradis, tandis que le non croyant va en enfer, donc perd tout.

Il est donc plus avantageux de croire en Dieu.

3) Le raisonnement de Pascal est adapté dans le cas d'existence d'un nombre fini de religions. Dans ce cas, on a $\boldsymbol{n}$ religions ($\boldsymbol{n}$ fini) donc si Dieu existe on aura $\boldsymbol{n}\times\infty=\infty$. Et même chose dans le cas où Dieu n'existe pas $\boldsymbol{n}\times 0=0$. Donc pas de changement.

Théorie du Cygne Noir

La théorie du cygne noir ou théorie des événements cygne noir, est une théorie dans laquelle on appelle cygne noir un certain événement imprévisible qui a une faible probabilité de se dérouler, mais dont l'occurrence porte une conséquence majeure.

On retrouve alors 3 critères pour un tel événement :

1. Le rôle disproportionné d'événements majeurs rares et extrêmement durs à prédire, qui sont hors des attentes normales en histoire, science, finance ou technologie.
2. L'impossibilité de calculer la probabilité de ces événements rares à l'aide de méthodes scientifiques (due à la nature même des très faibles probabilités).

3. Après le premier exemple de cet événement, il est rationalisé a posteriori, comme s'il avait pu être attendu.

Cette rationalisation rétrospective vient du fait que les informations qui auraient permis de prévoir l'événement étaient déjà présentes, mais pas prises en compte par les programmes d'atténuation du risque. La même chose est vraie pour la perception des individus.

On perd au Lotto !

Au Liban, on achète un billet de Lotto à 2000 L.L.
Chaque billet possède 6 nombres distincts, chacun peut être choisi de 1 à 42.
Si la cagnotte est 2×10^6 L.L. ,quelle valeur on estime gagner en moyenne ?

Solution :

On a $\binom{6}{42} = C_{42}^{6}$ possibilités pour choisir un billet.

Donc la probabilité de gagner est :

$$P = \frac{1}{C_{42}^{6}}$$

Soit X la variable aléatoire associée au gain .
La moyenne du gain est l'espérance de X.
On gagne 2×10^6 L.L. avec une probabilité P et on perd 2000 L.L avec une probabilité (1-P)

$$E(X) = 2 \times 10^6 \times P - 2000 \times (1 - P) = -1999\, L.L$$

Alors en moyenne on perd 1999 L.L. .