Session – Enoncé

Final Mecanique 3

SPE

Semestre 1

UNIVERSITE SAINT-JOSEPH
FACULTE D'INGENIERIE – ESIB

Vendredi 22 Janvier 2016

Mathématiques Spéciales

Examen semestriel de MECANIQUE
Durée 2h - Documents interdits - Calculatrices non programmables permises

Balançoire

Une piste AB en forme de quart de cercle, de centre O et de rayon R, de masse M, supporte une bille sphérique de masse m, de rayon r et de centre de masse G.

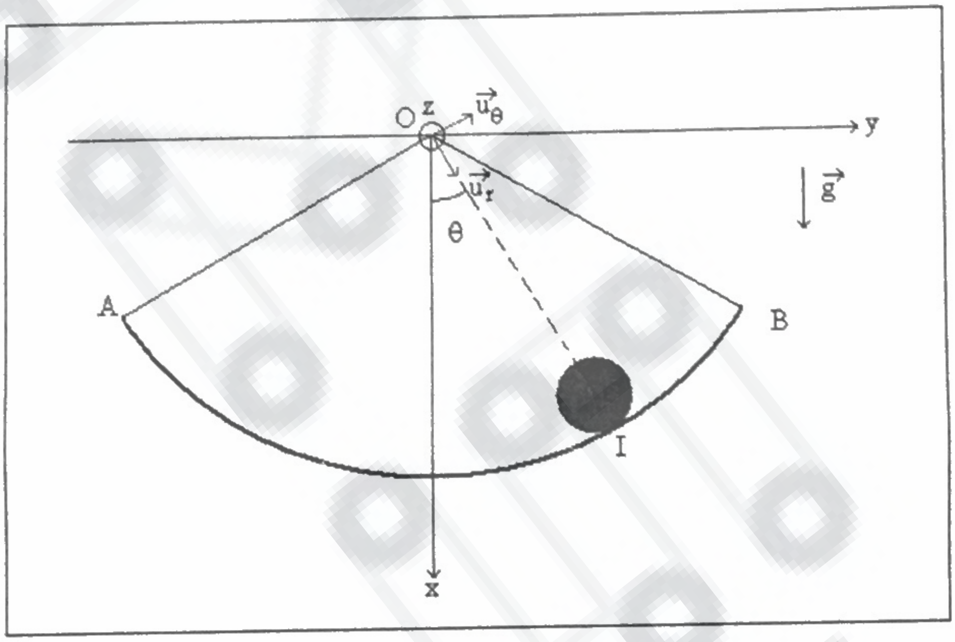

Figure 2

Les conditions initiales correspondent à des vitesses nulles, à une piste centrée par rapport à l'axe Ox, la bille est en revanche décentrée. On donne le moment d'inertie de la bille par rapport à un axe passant par son centre, $J = \frac{2}{5}mr^2$ (la bille est homogène). Dans tout le problème, on supposera que **la bille roule sans glisser sur la piste**. Le mouvement est décrit dans le repère R(O ; x, y, z), direct et supposé galiléen.
La rotation propre de la bille autour de Gz est repérée par $\varphi(t)$, et la rotation du segment OG par $\theta(t)$. On note I le point de contact entre la bille et la piste. L'action de contact en I de la piste sur la bille est $\vec{R} = -N\,\overrightarrow{u_r} + T\,\overrightarrow{u_\theta}$.

Partie A

On suppose dans cette partie que la piste est immobile ;

1- Montrer que la relation de roulement sans glissement s'écrit sous la forme :

$$(R - r)\dot{\theta} + r\dot{\varphi} = 0 \quad (1).$$

2- Ecrire la relation vectorielle, imposée par le théorème du centre de masse, pour la bille dans le repère R.
Projeter cette relation sur la base $\left(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}\right)$. Les deux équations obtenues seront notées (2) et (3).

3- Ecrire la relation vectorielle, imposée par le théorème du moment cinétique barycentrique, pour la bille.
Projeter cette relation selon $\overrightarrow{u_z}$. L'équation obtenue sera notée (4).

4- En utilisant les 4 équations obtenues aux questions précédentes, montrer que l'équation du mouvement de la bille s'écrit sous la forme :

$$\ddot{\theta} + \frac{5g}{7(R - r)} \sin\theta = 0 \quad (5).$$

5- On se place dans le cas où θ est faible. Que devient la nature du mouvement de la bille. Exprimer ses caractéristiques en fonction de g, R et r.

6- Retrouver l'équation (5) par un raisonnement énergétique.

Partie B

On suppose dans cette partie que la piste peut tourner sans frottement autour de l'axe Oz, **sa masse étant négligeable**. La rotation de la piste autour de Oz est repérée par $\psi(t)$.

7- Ecrire la nouvelle relation de roulement sans glissement. L'équation obtenue sera notée (6).

8- Les équations (2), (3) et (4) changent-elles ?

9- Ecrire la relation vectorielle, imposée par le théorème du moment cinétique en O, pour la piste.
Projeter cette relation selon $\overrightarrow{u_z}$. L'équation obtenue sera notée (7).

10- Montrer que l'équation du mouvement de la bille dans cette partie s'écrit alors sous la forme :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{(R - r)} \sin\theta = 0 \quad (8).$$

11- On se place dans le cas où θ est faible. Que devient la nature du mouvement de la bille. Exprimer ses caractéristiques en fonction de g, R et r.

Fin de l'examen