Tome I : Introduction à la couche limite.

Exercices d'application.

Exercice 1 (page 81).

1). $\frac{u}{U_0} = A + By + Cy^2 + Dy^3$

Conditions aux limites :

- Pour $y = 0 \Rightarrow u = 0$.
- Pour $y = \delta \Rightarrow u = U_0$ et $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$.

- Sur la plaque en $y = 0$ ($\eta = 0$), la composante de vitesse est nulle, $\frac{dp}{dx} = 0$.

L'équation de mouvement donne : $\frac{d^2u}{dy^2} = 0$ (ou pas de point anguleux : $\frac{d^2u}{dy^2} = 0$)

car $u \cancel{\frac{du}{dx}}^{0} + v \cancel{\frac{du}{dy}}^{0} = -\cancel{\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx}}^{0} + \nu \frac{d^2u}{dy^2}$

relation de Bernoulli différenciée

D'où le système

$$\begin{cases} 0 = A \\ 1 = B\delta + C\delta^2 + D\delta^3 \\ 0 = B + 2C\delta + 3D\delta^2 \\ 0 = 2C \end{cases}$$

On retrouve $A = C = 0$.

$B = \frac{3}{2\delta}$ et $D = -\frac{1}{2\delta^3}$

D'où le profil de vitesse :

$$\frac{u}{U_0} = \frac{3}{2}\frac{y}{\delta} - \frac{1}{2}\frac{y^3}{\delta^3}.$$

2) D'après l'équation de Von Karman,

$$* \ \tau_0 = \rho U_0^2 \frac{\partial \delta^{**}}{\partial x} \ (*)$$

$$\delta^{**} = \int_0^{\delta} \frac{u}{U_0}\left(1 - \frac{u}{U_0}\right) dy. \ (1).$$

$$* \ \tau_0 = \nu \frac{du}{dy} \text{ pour } y = 0 \ (**)$$

$\tau_0 = 3\dfrac{\nu U_0}{2\delta}$, d'après le profil de vitesse.

Par intégration de (1), on retrouve $\delta^{**} = 0,139\,\delta$

En égalisant $(*)$ et $(**)$:

$$\frac{3\nu U_0}{2\delta} = \rho U_0^2 \times 0,139 \frac{\partial \delta}{\partial x}$$

D'où $\delta = 4,64\sqrt{\dfrac{\nu x}{U_0}}$, par intégration.

* On considère que le fluide est au repos et la plaque bouge à une accélération a :

. Fluide au repos : $U_0 = 0$.
. Equation du mouvement : $\underbrace{\frac{\partial u}{\partial t}}_{\text{car on a accélération}} + u \underbrace{\cancel{\frac{\partial u}{\partial x}}}_{u \text{ fonction de } y}^{0} + \underbrace{v}_{v=0} \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\cancel{\frac{\partial p}{\partial x}}^{0} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$

$$\underbrace{\frac{\partial u}{\partial t}}_{\text{terme d'inertie}} = \nu \underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}}_{\text{terme de frottements}} \quad (1)$$

$$\mathcal{O}\left(\frac{\partial u / \partial t}{\nu\, \partial^2 u / \partial y^2}\right) = 1.$$

$$\mathcal{O}\left(\frac{u/t}{\nu\, u/L^2}\right) = 1 \Rightarrow \mathcal{O}(L) = \sqrt{\nu t}.$$

$$\eta = \frac{y}{L} = \frac{y}{\underbrace{2}\sqrt{\nu t}}$$

d'après les calculs, pour tomber sur une forme classique connue.

$$\frac{u}{U_0} = f(\eta)$$

On remplace dans (1) : $f'' + 2\eta f' = 0$

$$\rightarrow f = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\eta} e^{-\eta^2} d\eta$$

$\rightarrow u = U_0 \left(1 - \underset{\substack{\downarrow \\ \text{erreur}}}{\text{er}} f(x)\right)$ densité de Gauss

Pour $\eta \rightarrow \infty$, er $f \rightarrow 1$ (surface sous la courbe gaussienne).

3)- Contrainte de frottement à la paroi :

$$\tau_0 = \frac{3 \mu U_0}{2 \times 4{,}64} \sqrt{\frac{U_0}{\nu x}} = \frac{\rho U_0^2}{2} C_{fl}$$

$C_{fl} = 0{,}646 \cdot Re_{(x)}^{-1/2}$ dans Re le terme de longueur est représenté par x.

$F_f = \int_0^L \tau_0 \, dx$, par unité de largeur.

$$F_f = \int_0^L \rho \frac{U_0^2}{2} \times 0{,}646 \sqrt{\frac{\nu}{U_0}} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

$$F_f = \left[\rho \frac{U_0^2}{2} \times 0{,}646 \sqrt{\frac{\nu}{U_0}} \times 2\sqrt{x}\right]_0^L$$

Or $F_f = \rho \frac{U_0^2}{2} C_{fg} \times L \times 1$

$\rightarrow C_{fg} = 1{,}292 \, R_{eL}^{-1/2}$

Blasius

$\downarrow$

1,328

Exercice 3 (page 81).

$$m\frac{dv}{dt} = -F_{voiture} - F_{parachute}$$

$$= -\frac{1}{2}\rho v^2 C_v S_v - \frac{1}{2}\rho v^2 C_p S_p$$

$$= \underbrace{-\frac{1}{2}\rho\left(C_v S_v + C_p S_p\right)}_{-k} v^2$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{-k}{m} v^2$$

$$\int_{v_0}^{v} \frac{dv}{v^2} = \int_0^t -\frac{k}{m}\, dt$$

$$\frac{1}{v_0} - \frac{1}{v} = -\frac{k}{m} t.$$

$$v = \frac{v_0}{1 + \frac{v_0 k}{m} t}, \quad \text{or } v = \frac{dx}{dt}$$

On pose $\alpha = \frac{k}{m} v_0$, d'où $\frac{dx}{dt} = \frac{v_0}{1+\alpha t}$

$$\frac{dx}{v_0} = \frac{dt}{1+\alpha t}$$

$$x = \frac{v_0}{\alpha} \ln(1+\alpha t).$$

on prend $C_p = 2,3.$

Exercice 11 (page 85)

1) Ecoulement turbulent, $\delta = 0,373 \times R_{e_x}^{-1/2} = 0,11$.

$\rightarrow 0,373 \, x \left(\frac{\nu}{U_0}\right)^{-1/5} = 0,11$.

$\nu = \frac{\mu}{\rho}$

$$x^{4/5} = \frac{0,11}{0,373} \left(\frac{U_0}{\nu}\right)^{-1/5}$$

$$= \frac{0,11}{0,373} \cdot \left(\frac{4}{\left(\frac{1,94 \times 10^{-5}}{1,16}\right)}\right)^{-1/5}$$

$$x = 4,8 \text{ m}.$$

2) Soit $R_{ec} = 5 \times 10^5$

$$\frac{U_0 x_\ell}{\nu} = 5 . 10^5$$

$$\frac{4 \times x_\ell}{1,94 \times 10^{-5} / 1,16} = 5 \times 10^5$$

$$x_\ell = 2,09 \text{ m}.$$

Epaisseur de la couche laminaire : $5 \sqrt{\frac{\nu x_\ell}{U_0}}$

Epaisseur de la couche turbulente : $0,373 \times 0,177 x_\ell \left(\frac{\nu}{U_0 \times 0,177 x_\ell}\right)^{1/5}$

$$5 \sqrt{\frac{\nu x_\ell}{U_0}} = 0,373 \times 0,177 \, x_\ell \left(\frac{\nu}{U_0 \times 0,177 x_\ell}\right)^{1/5}$$

$$0,177 \, x_\ell = 0,37 \text{ m}.$$

D'où $L = 4,8 + 2,09 - 0,37$

$L = 6,52 m$

NB: Si R_{ec} n'est pas connu, on résout :

$$5 \sqrt{\frac{\nu x_e}{U_0}} = 0,373 \times 0,177\, x_e \left(\frac{\nu}{U_0 \times 0,177\, x_e} \right)^{1/5}$$

$x_e = 2,4 m.$ $(2,25 m)$.

$$R_{ec} = \frac{U_0 x_e}{\nu}$$

$R_{ec} \simeq 600\,000$

$$C_{fg} = 0,0726 \left(R_{L} \right)^{-1/5} - 2080 \left(R_{L} \right)^{-1}$$

Exercice 9 (page 83).

1) Conditions aux limites :

- $y = 0 \Rightarrow u = 0 \Rightarrow b = 0$
- $y = \delta \Rightarrow \frac{u}{V_0} = 1 = a \sin(\alpha y/\delta)$
- $y = \delta \Rightarrow \frac{du}{dy} = 0 \Rightarrow \cos\alpha = \quad \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}$.

+ voir l'exercice d'application 4.

3) $\left(\frac{du}{dy}\right)_{y=0} = 0 \rightarrow$ décollement.

Dans ce cas, pas de décollement (profile non réaliste).

Exercice 8 (page 83).

1)- Pour $x = 0$, $R_e = 0$.

- À l'extrémité de la plaque,

Ecoulement turbulent : $0{,}042 = 0{,}373\, x \left(\frac{\nu}{U_0\, x}\right)^{1/5}$

$$0{,}373 \times 3 \times (R_{e_x})^{-1/5} = 0{,}042$$

$$(R_{e_x})^{-1/5} = \frac{0{,}042}{3 \times 0{,}373}$$

$$R_{e_x} = \cancel{11\ 934\ 605}$$

$$13\ 424\ 681$$

$$\frac{U_0 \times 3}{0{,}96 \times 10^{-6}} = \cancel{11\ 934\ 605}$$

$$U_0 = 3{,}1\ m/s \text{ ou } 4{,}3\ m/s$$

R_e est très élevé $\Rightarrow$ tout au long de la plaque R_e est élevé.

Longueur de transition : $\frac{4{,}3\, x_T}{0{,}96 \times 10^{-6}} = 5 \times 10^5$

$\Rightarrow$ longueur laminaire négligeable

$\Rightarrow$ on peut considérer l'écoulement turbulent.

$$\tau_0 = \frac{1}{2}\rho U_0^2 \, C_{fL}$$

$$= \frac{1}{2}\rho U_0^2 \times 0{,}058 \, R_e^{-1/5}$$

$$= \frac{1}{2}\rho U_0^2 \times 0{,}058 \left(\frac{\nu}{U_0 \times 3}\right)^{1/5}$$

$$F_f = \int_0^3 \tau_0 \, dx \qquad \text{où} \quad F_f = 0{,}726$$