MOUVEMENT
DE L'ESIB
SOLIDAIRE

Corrigé de Sessions

Logiques Floues

3ème Courant Fort

UNIVERSITÉ SAINT-JOSEPH

FACULTÉ D'INGÉNIERIE

BEYROUTH - LIBAN

Nom : Elie Toni MHANNA

Matricule 110645

Cursus: Ingénieur Génie Electrique et Mécanique

Année universitaire: 2014 - 2015

Semestre académique: IV

MATIÈRE Logique Floue - Réseaux Neuronaux

Note : 17,00

En chiffres

Date 29/10/2014

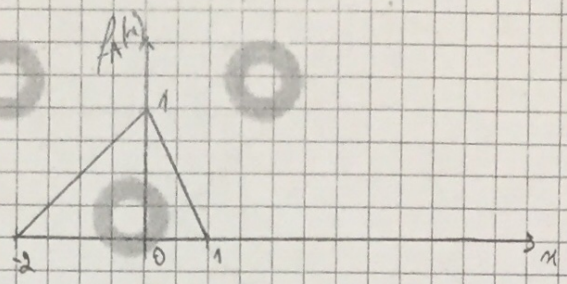
EXERCICE N°	NOTE
1	4
2	5,5
3	4
4	3,5
5	
6	
7	
8	
9	
10	
TOTAL	17,00

Remarques:

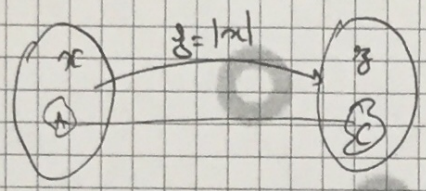
Exercice 1 :

On a $B = e^{|A|}$

$A = \text{tri}(-2, 0, 1)$

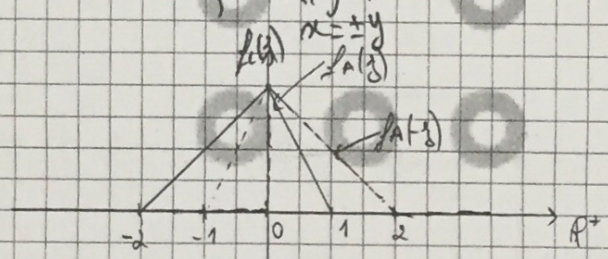


Soit $C = |A| \Rightarrow B = e^C$



$$\forall y \in \mathbb{R}^+,\ f_C(y) = \sup_{\{x \in \mathbb{R} / y = |x|\}} f_A(x) = \sup\{f_A(y) ; f_A(-y)\}$$

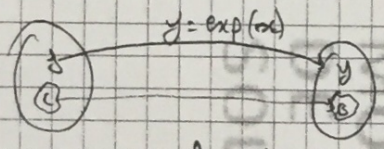
$x = \pm y$



4

Or, $y \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow f_C(y)$

$\Rightarrow B = e^C$ avec $C = \text{tri}(0, 0; 2)$

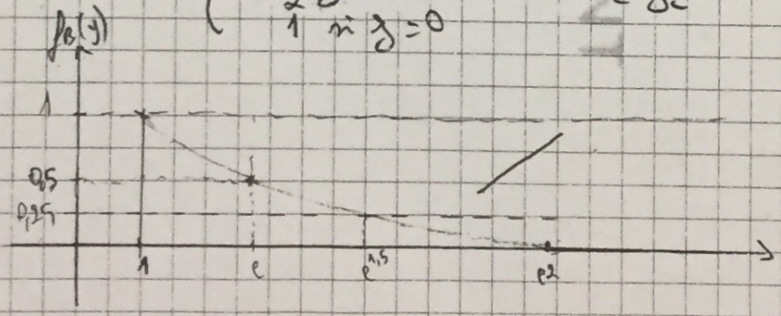


$$\forall y \in \mathbb{R}^+,\ f_B(y) = \sup_{\substack{\{y \in \mathbb{R} / y = e^y\} \\ y = \ln y}} f_C(y) = f_C(\ln y)$$

Or, $f_C(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0 \text{ ou } y \geq 2 \\ -\frac{1}{2}y + 1 & \text{si } 0 \leq y \leq 2 \\ 1 & \text{si } y = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow f_B(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } \ln y < 0 \text{ ou } \ln y \leq 1 \text{ ou } y \geq \\ -\frac{1}{2}\ln y + 1 & \text{si } 0 \leq \ln y \leq 2 \\ 1 & \text{si } \ln y = 0 \Rightarrow y = 1 \end{cases}$ $1 \leq y \leq e$

pour $y = e \Rightarrow f_B(y) = -\frac{1}{2} + 1 = 0,$



$B_{0,25} = \{ y \in \mathbb{R}^+ / f_B(y) \geq \frac{1}{4} \}$

$\Rightarrow \quad -\frac{1}{2} \ln y + 1 = \frac{1}{4}$

$\Rightarrow -\frac{1}{2} \ln y = -\frac{3}{4} \Rightarrow \ln y = \frac{3}{2} \Rightarrow y = e^{3/2} = e^{1,5}$

$\Rightarrow \boxed{B_{0,25} = [1, e^{1,5}]}$

<u>Exercice 2 :</u>

Si l'$\underbrace{\text{Epée}}_{A}$ est vieux alors une $\underbrace{\text{médiocre}}_{B}$

$f_{vieux}(x) = \text{trapèze}(10, 70, 120, 120)$

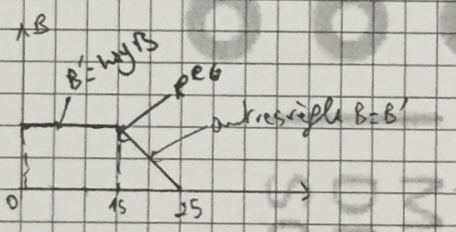
$f_{médiocre}(y) = \text{trapèze}(0, 0, 15, 25)$

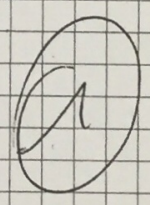
1) L'observation est le noyaux de la classe vieux

$\Rightarrow A' = noy(A) \subseteq A$

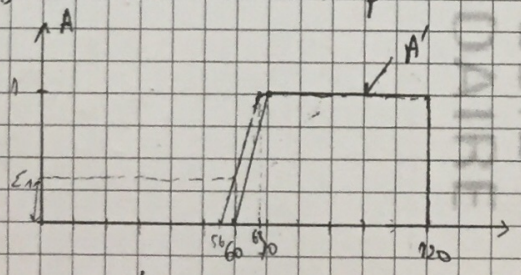
Donc on a pour $\boxed{B' = B \text{ pour toutes les règles}}$ R^E, R^G, R^{BG}, R^E sauf R^{EG}

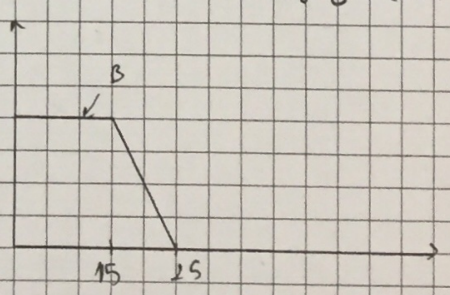
et pour $\boxed{R^{EG} \text{ on a } B' = noy(B)}$





2) L'observation est plus ou moins vieux $\Rightarrow A' = \text{trapèze}(56, 68, 120, 120)$





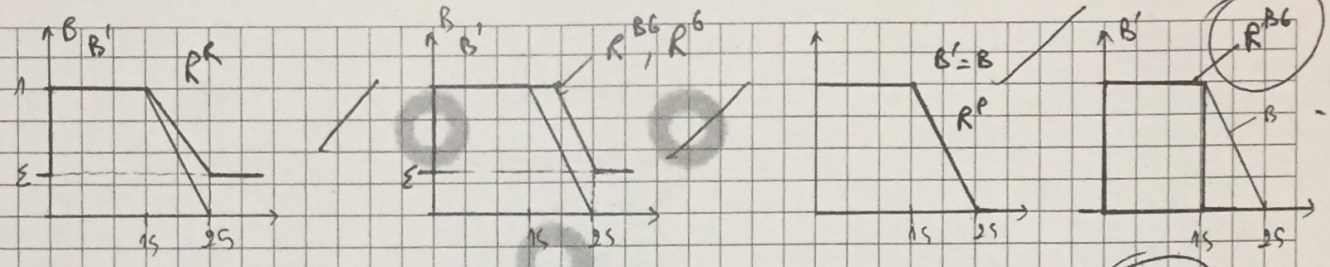
On a $A \subseteq A'$

On a $\varepsilon_1 = \inf_{\{x \in X / f_A(x) = 0\}} f_{A'}(x)$ pour R^{EG}, R^{BG}, R^G $\Rightarrow \varepsilon_1 = \frac{1}{3} = 0,333$

et $\varepsilon_2 = \inf_{x \in X} \max\{f'_A(x) - f_A(x), 0\}$ pour les autres relations.

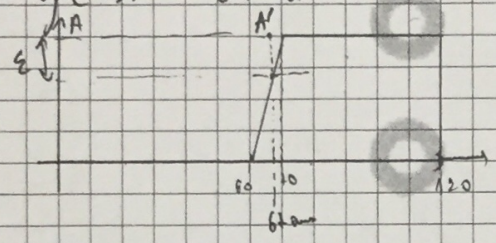
$= \varepsilon_1 = 0,333 = 1/3$

$= 1/3 = 0,333 = \frac{1}{3}$



1,5

3) L'âge est de 67 ans

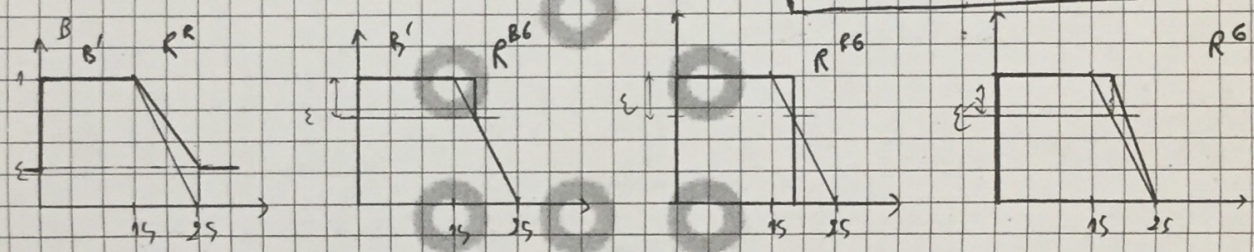


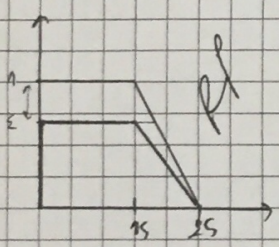
$\varepsilon = 1 - f(67)$

Thalès $\Rightarrow \frac{7}{10} = \frac{f(67)}{1}$

$\Rightarrow f(67) = 0{,}7$

$\Rightarrow \boxed{\varepsilon = 1 - 0{,}7 = 0{,}3}$





3

Exercice 3 :

$R : X \to X \ / \ f_R(x_i, x_j), \ i,j = 1, \dots, 4$

- $\forall x \in X, \ f_R(x,x) = 1$ donc R est réflexive.
- $f_R(x_2, x_1) = 0 \neq f_R(x_1, x_2) = 0,6$ donc R non symétrique.
- On remarque que R est aussi symétrique car $\forall (x,y)$, $f(x,y)$ ou $f(y,x) = 0$
- R transitive ?

R	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	1	0,6	0,4	0,4
x_2	0	1	0	0
x_3	0	0,3	1	0
x_4	0	0,7	0,8	1

RoR	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	1	0,6	0,4	0,4
x_2	0	1	0	0
x_3	0	0,3	1	0
x_4	0	0,7	0,8	1

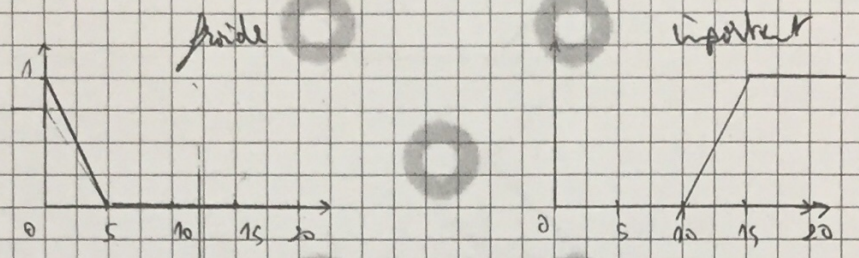
$f_{RoR}(x_i, x_k) = \sup_{x_j \in X^2} \min \{ f_R(x_i, x_j), f_R(x_j, x_k) \}$.

On remarque que $\forall (x_i, x_k) \in X^2$, $f_{RoR}(x_i, x_k) \leq f_R(x_i, j)$ ici c'est égale

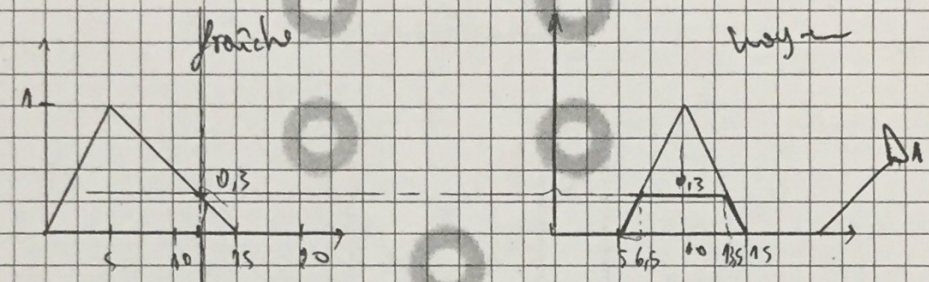
Donc R est transitive.

Exercice 4 :

R1 :

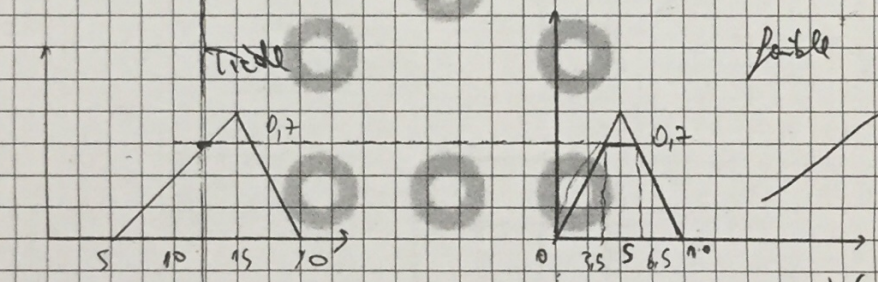


R2 :



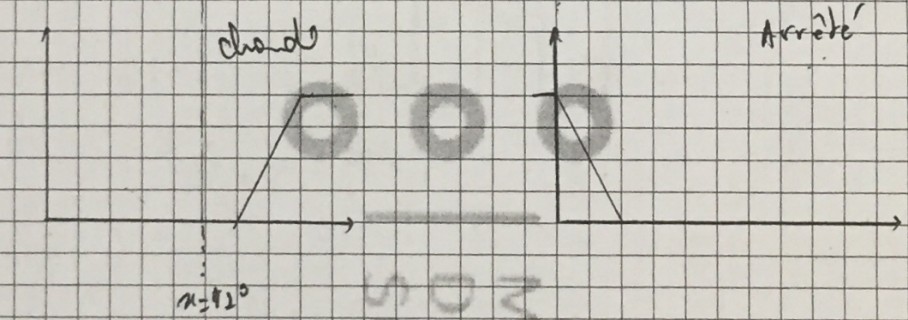
$\frac{x}{5} = \frac{0,3}{1} \Rightarrow x = 1,5$

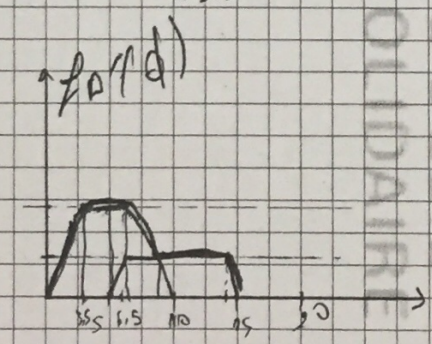
R3 :



$\frac{x}{5} = \frac{0,7}{1}$ $x = 3,5$

R4 :





$d_0 = \frac{\sum S_i d_i}{\sum S_i}$ d_i : barycentre de

3,5

Ziad Saleh

Examen Partiel de Logique Floue - Avril 2011

Exercice 1

On a :

$f_{A_1}(1) = 0,7$; $f_{A_1}(5) = 0,2$; $f_{A_1}(10) = 0,4$

$f_{A_2}(1) = 0,3$; $f_{A_2}(2) = 0,6$; $f_{A_2}(6) = 0,9$

* Sous ensemble flous $A_1 \oplus A_2$

On definit $f_{A_1 \oplus A_2}(z) = \sup_{(x,y \in \mathbb{N}^2 / z = x+y)} \min\left(f_{A_1}(x), f_{A_2}(y)\right)$

- $f_{A_1 \oplus A_2}(2) = f_{A_1 \oplus A_2}(1+1)$

$\Rightarrow f_{A_1 \oplus A_2}(2) = \sup \min\left(f_{A_1}(1), f_{A_2}(1)\right)$

$\Rightarrow \boxed{f_{A_1 \oplus A_2}(2) = 0,3}$

- $f_{A_1 \oplus A_2}(3) = \sup \min\left(f_{A_1}(1), f_{A_2}(2)\right) \Rightarrow \boxed{f_{A_1 \oplus A_2}(3) = 0,6}$

- Pour $z = 7$ on a 2 possibilités $z = 5+2$ ou $z = 6+1$

$\Rightarrow f_{A_1 \oplus A_2}(7) = \sup\left[\min\left(f_{A_1}(1), f_{A_2}(6)\right), \min\left(f_{A_1}(5), f_{A_2}(2)\right)\right]$

$\Rightarrow f_{A_1 \oplus A_2}(7) = \sup(0,7 ; 0,2) \Rightarrow \boxed{f_{A_1 \oplus A_2}(7) = 0,7}$

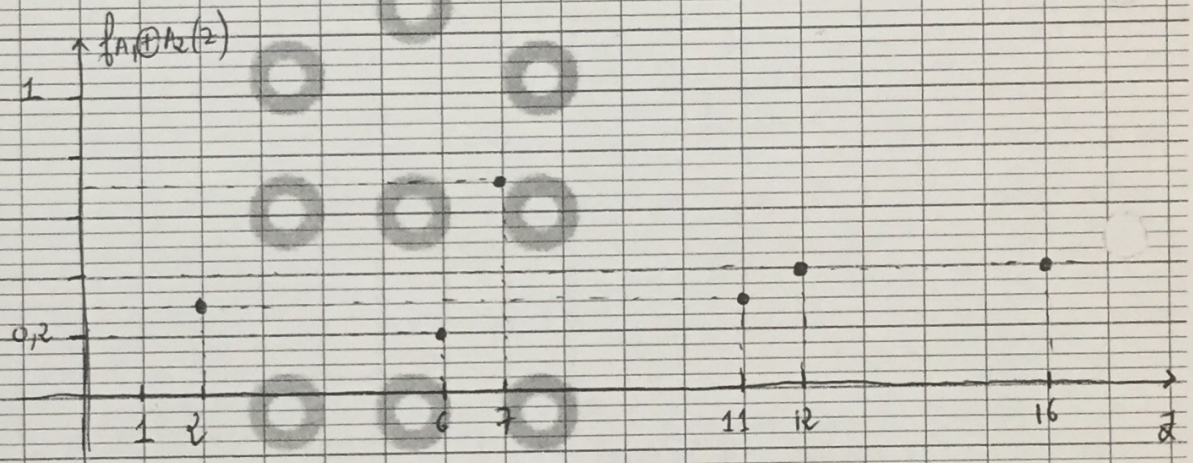
- $f_{A_1 \oplus A_2}(6) = \sup \min\left(f_{A_1}(5), f_{A_2}(1)\right) \Rightarrow \boxed{f_{A_1 \oplus A_2}(6) = 0{,}2}$

- $f_{A_1 \oplus A_2}(11) = \sup\left[\min\left(f_{A_1}(5), f_{A_2}(6)\right), \min\left(f_{A_1}(10), f_{A_2}(1)\right)\right.$

$\Rightarrow \boxed{f_{A_1 \oplus A_2}(11) = 0{,}3}$

- $f_{A_1 \oplus A_2}(12) = 0{,}4$

- $f_{A_1 \oplus A_2}(16) = 0{,}4$



* <u>Sous ensemble flou $A_1 \otimes A_2$</u>

On definit $f_{A_1 \otimes A_2}(z) = \sup_{z = xy}\left[\min f_{A_1}(x), f_{A_2}(y)\right]$

Les differents valeurs possibles de z sont $1, 2, 5, 6, 10, 20, 30, 60$

- $f_{A_1 \otimes A_2}(1) = \sup\left[\min\left(f_{A_1}(1), f_{A_2}(1)\right)\right] \Rightarrow \boxed{f_{A_1 \otimes A_2}(1) = 0{,}3}$

- $f_{A_1 \otimes A_2}(2) = \sup\left[\min f_{A_1}(1), f_{A_2}(2)\right] \Rightarrow \boxed{f_{A_1 \otimes A_2}(2) = 0{,}6}$

- $f_{A_1 \otimes A_2}(5) = \sup\left[\min\left(f_{A_1}(5), f_{A_2}(1)\right)\right] \Rightarrow \boxed{f_{A_1 \otimes A_2} = 0{,}2}$

- $\boxed{f_{A_1 \otimes A_2}(6) = 0{,}7}$

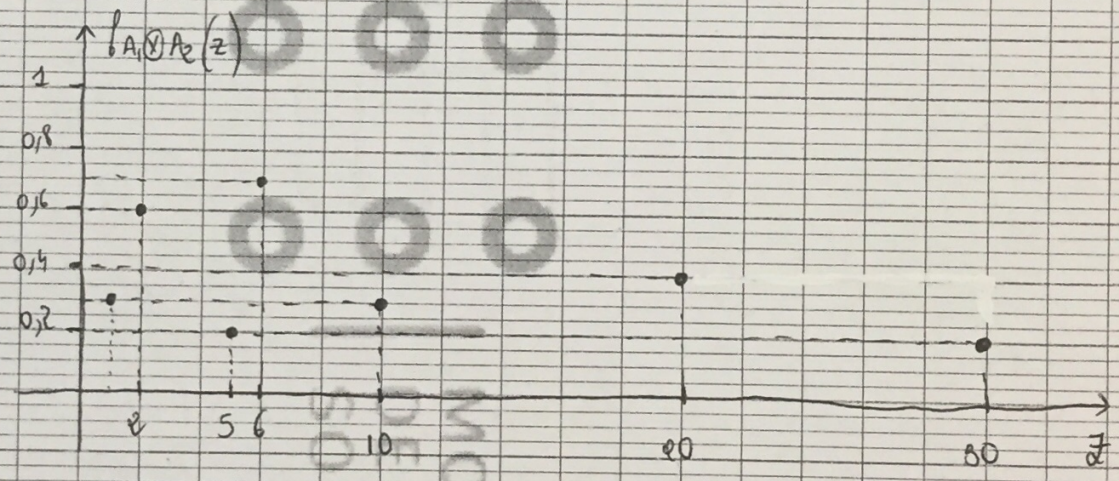
- $f_{A_1 \otimes A_2}(10) = \sup\left[\min\left(f_{A_1}(5), f_{A_2}(2)\right), \min\left(f_{A_1}(10), f_{A_2}(1)\right)\right]$

  $\Rightarrow f_{A_1 \otimes A_2}(10) = \sup\left[0{,}2 ; 0{,}3\right] \Rightarrow \boxed{f_{A_1 \otimes A_2}(10) = 0{,}3}$

- $f_{A_1 \otimes A_2}(20) = 0{,}4$

- $f_{A_1 \otimes A_2}(30) = 0{,}2$

- $f_{A_1 \otimes A_2}(60) = 0{,}4$



<u>Exercice 3</u>

$A = \text{tri}(0,1,3)$; $B = \text{tri}(5,7,8)$

- A et B sont liés par une relation R qui enonce

  " Si V est A alors W est B "

On définit alors la fonction d'appartenance de R

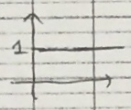
$$f_R(x,y) = \phi\left[f_A(x), f_B(y)\right]$$

$$\Rightarrow f_R(x,y) = \min\left[1 - f_A(x) + f_B(y), 1\right]$$

(On a utilisé ϕ la relation d'implicat° de Lukasiewicz)

(Voir tableau p29 Poly du prof)

En supposant que $f_R(x,y) \neq 1$



on a alors

$$\boxed{f_R(x,y) = 1 - f_A(x) + f_B(y)}$$

- Soit $A' = \text{tri}(0,2,3)$

On a $f_{B'}(y) = \sup_{x \in X} T\left[f_{A'}(x), f_R(x,y)\right]$

or pour une implication de Lukasiewicz on a $T(u,v) = \max(u+v-1, 0)$

$$\Rightarrow f_{B'}(y) = \sup_{x \in X}\left[\max\left(f_{A'}(x) + f_R(x,y) - 1, 0\right)\right]$$

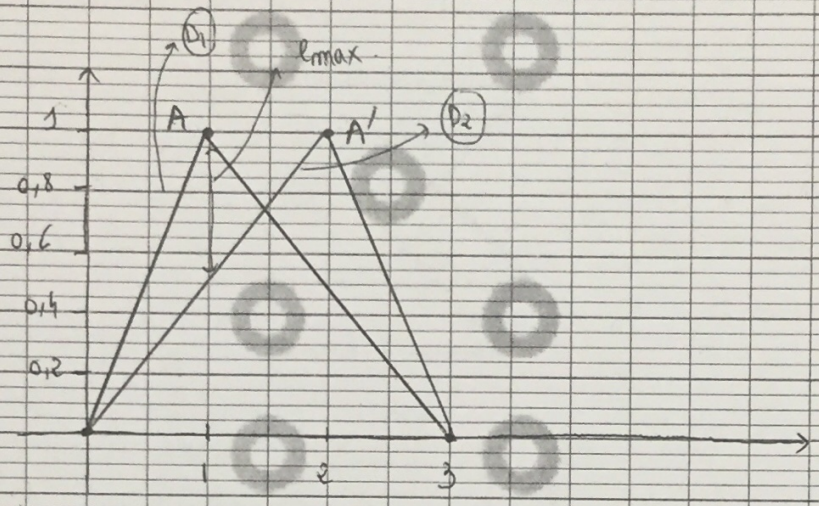
On remplace $f_R(x,y)$ par ce on a déjà trouvé

$$\Rightarrow f_{B'}(y) = \sup_{x \in X}\left[\max\left(f_{A'}(x) + f_B(y) - f_A(x), 0\right)\right]$$

$f_B(y)$ indépendant de x, on peut donc la sortir du bloc $\sup_{x \in X}[\ldots]$

$$\Rightarrow \boxed{f_{B'}(y) = f_B(y) + \sup_{x \in X}\left[f_{A'}(x) - f_A(x)\right]}$$

Graphiquement on a :

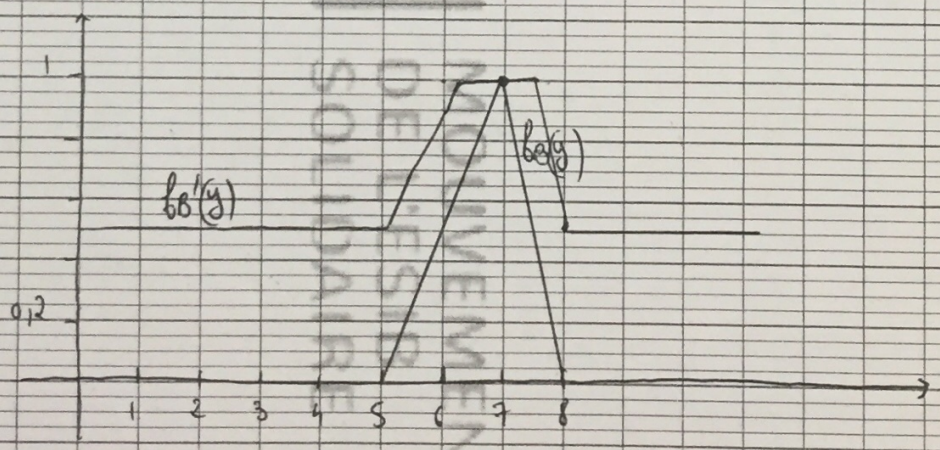


On définit comme $e = f_{A'}(x) - f_A(x)$.

$$D_1 - D_2 = x - \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}x$$

L'écart est maximal pour $x = 1$ $\Rightarrow$ $\underline{e = 0,5}$

On lire $f_B'(y) = f_B(y) + 0,5$

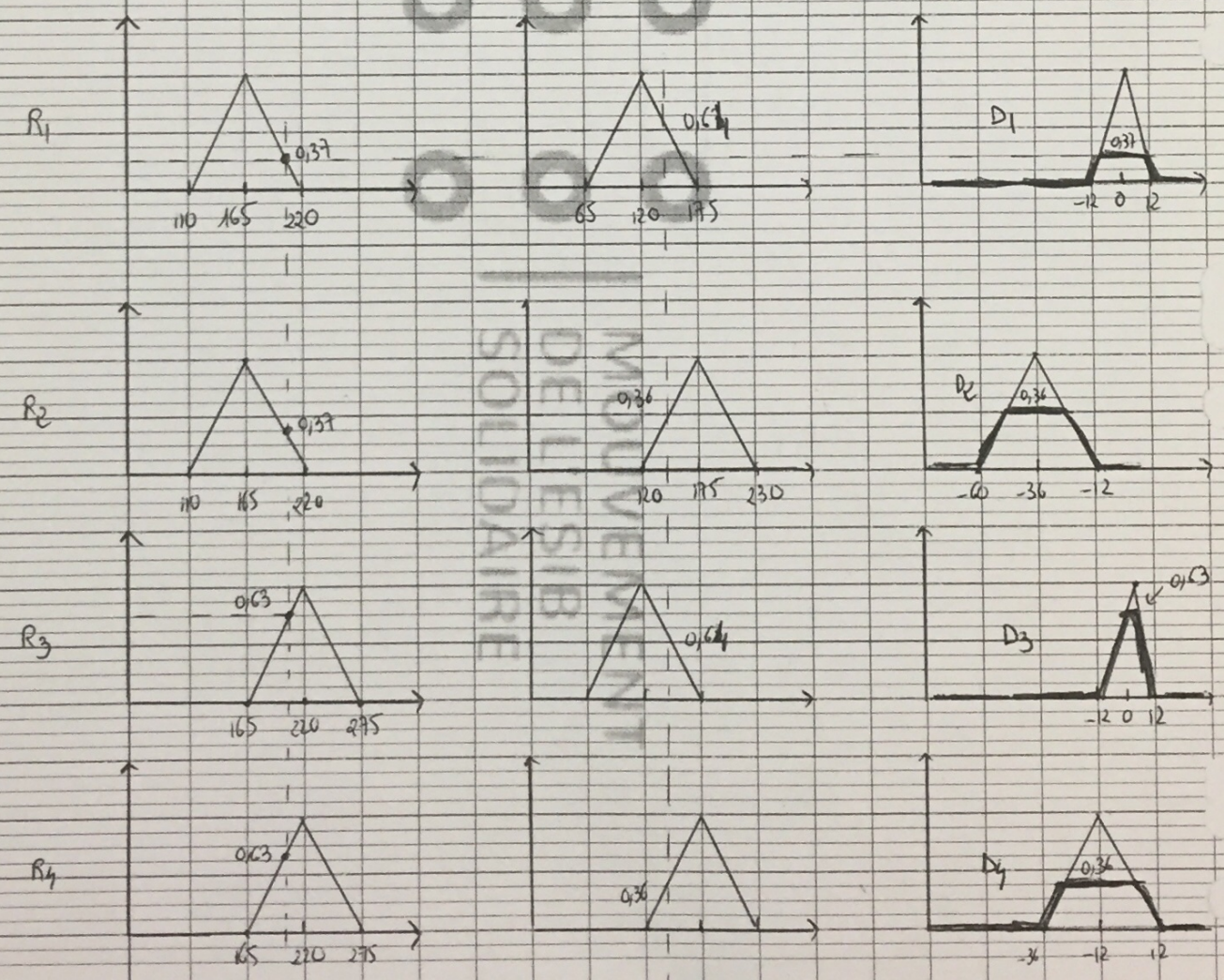


Exercice 4

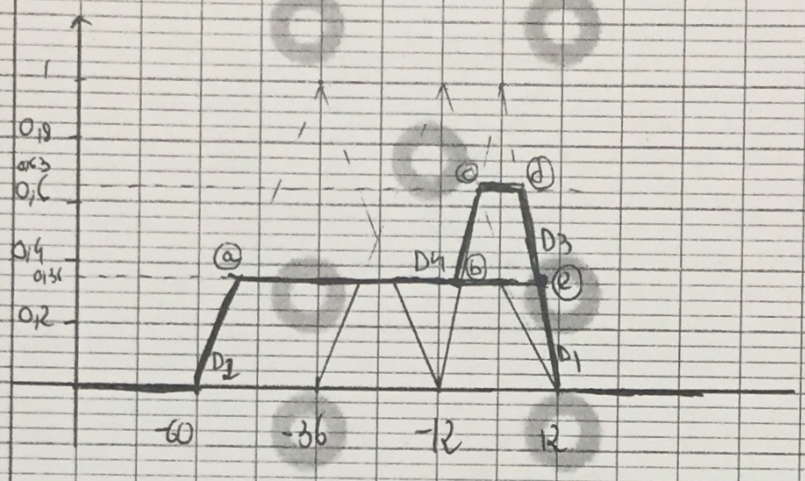
La commande est à calculer pour T = 200 et P = 140.
Dans ce cas on considera uniquement les ensembles :
{Cool} {Normal} {OK} {Strong}

Les 4 relat° possibles sont enoncés ci-dessous.

- R_1 : Si la T°C est Cool et la pression OK alors la sortie est ZR
- R_2 : " " " " Cool " " " Strong " " " " NM
- R_3 : " " " " Normal " " " OK " " " " ZR
- R_4 : " " " " Normal " " Strong " " " " NS



* Agrégation



Abscisse de ⓐ : -51,4
" de ⓑ : -7,7
" de ⓒ : -4,5
" de ⓓ : 4,5
" de ⓔ : 7,7

On note y_0 le singleton / réponse finale.

$$y_0 = \frac{\sum S_i \phi_i}{\sum S_i}$$

S → surface
ϕ → centre de gravité des surfaces

- $S_1 = \frac{1}{2} \times 0{,}36 \left(-51{,}4 + 60\right) = 1{,}55$

  $\phi_1 = -51{,}4 - \frac{1}{3}\left(-51{,}4 + 60\right) = -54{,}3$

- $S_2 = 0{,}36 \times \left(-12 + 51{,}36\right) = 14{,}2$

  $\phi_2 = \frac{-51{,}4 - 12}{2} = -31{,}7$

- $S_3 = \frac{1}{2} \times 0{,}36 \times \left(-7{,}7 + 12\right) = 0{,}77$

  $\phi_3 = -12 + \frac{1}{3}\left(12 - 7{,}7\right) = -10{,}56$

- $S_4 = \frac{1}{2} \times \left(0{,}63 \times (12 - 4{,}5)\right) = 2{,}36$

  $\phi_4 = -4{,}5 - \frac{1}{3}\left(12 - 4{,}5\right) = -7$

- $S_5 = 0{,}63 \times \left(7{,}7 + 4{,}5\right) = 7{,}7$

  $\phi_5 = \frac{7{,}7 - 4{,}5}{2} = 1{,}6$

- $S_6 = \frac{1}{2} \times 0{,}63 \times \left(12 - 7{,}7\right) = 1{,}35$

  $\phi_6 = 7{,}7 + \frac{1}{3}\left(12 - 7{,}7\right) = 9{,}13$

On tire $\boxed{y_0 = -19{,}13}$

Ziad Saleh

Correction de l'examen partiel
de Logique Flou - Réseaux Neuronaux
du Mercredi 14 Avril 2010

Exercice 1 :

Soit : $D = (A \oplus 2B) \ominus C$, avec : $A = \text{triangle}(-8, -6, -1)$,
$B = \text{triangle}(2, 3, 5)$ et $C = \text{triangle}(1, 2, 4)$.

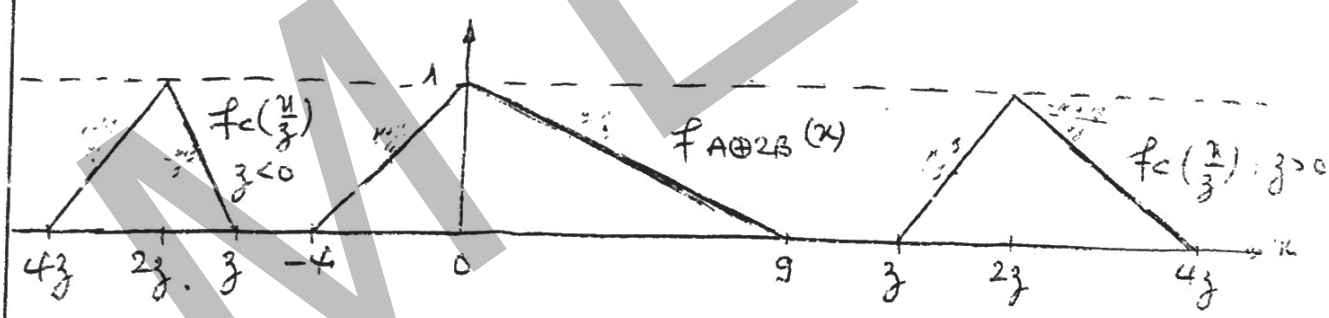
On tire :

$$2B = \text{triangle}(4, 6, 10) \quad \text{et} \quad A \oplus 2B = \text{triangle}(-4, 0, 9)$$

Il reste à calculer :

$$f_D(z) = \sup_{\{(x,y)/z = x(y)\}} \min\left[f_{A\oplus 2B}(x),\ f_C(y)\right]$$

$$= \sup_{\{x \in \mathbb{R}\}} \min\left[f_{A\oplus 2B}(x),\ f_C\left(\frac{x}{z}\right)\right]$$



- si $z \geq 9$ ou $z \leq -4$, alors : $f_D(z) = 0$

- si $0 < z \leq 9$, alors : $f_D(z) = \dfrac{9-x}{9}$, avec x / $\dfrac{9-x}{9} = \dfrac{x-z}{z}$

$$\Rightarrow 9z - zx = 9x - 9z \Rightarrow x(9+z) = 18z \Rightarrow x = \frac{18z}{9+z}$$

D'où l'on tire :

$$f_D(z) = \frac{1}{9}\left(9 - \frac{18z}{9+z}\right) = \frac{9+z-2z}{9+z} = \frac{9-z}{9+z}$$

• Si $-4 \leq z < 0$, alors :

$$f_D(z) = \frac{x+4}{4}, \text{ avec : } x \,/\, \frac{x+4}{4} = \frac{x-z}{z} \Rightarrow zx+4z = 4x-4z$$

$$\Rightarrow x(z-4) = -8z \rightarrow x = \frac{8z}{4-z}$$

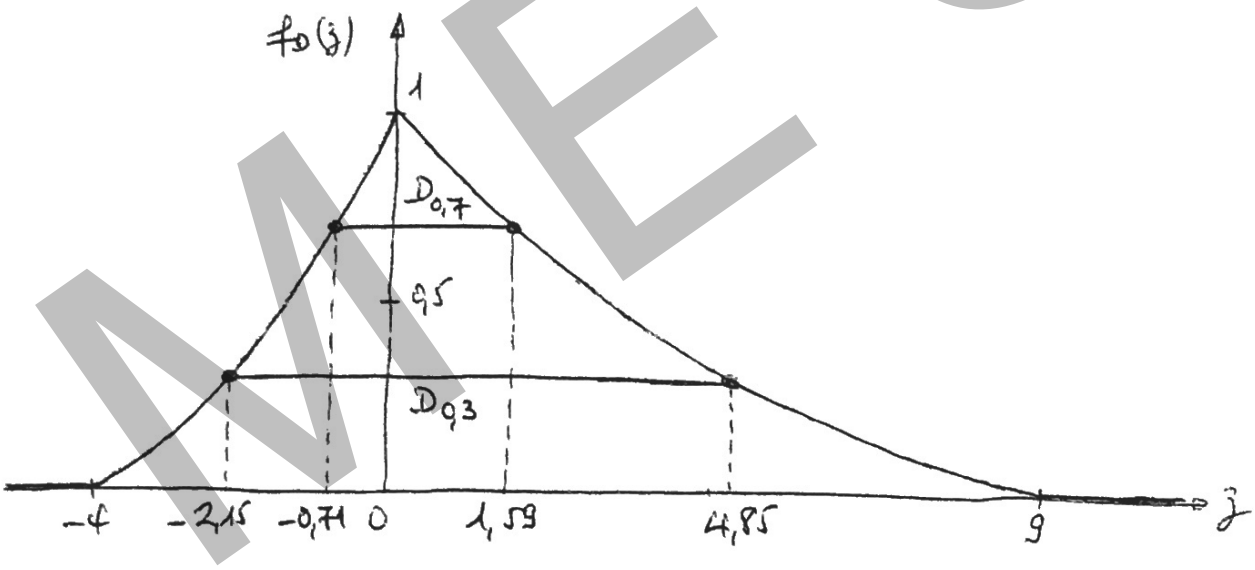
D'où l'on tire :

$$f_D(z) = \frac{x}{4}+1 = \frac{2z}{4-z}+1 = \frac{2z+4-z}{4-z} = \frac{z+4}{4-z}$$

• Si $z=0$, alors :

$$f_D(z) = \sup_{\{y \in \mathbb{R}\}} \min\left[f_{A \oplus 2B}(0),\ f_C(y)\right]$$

$$= \sup_{\{y \in \mathbb{R}\}} \min\left[1,\ f_C(y)\right] = \sup_{\{y \in \mathbb{R}\}} f_C(y) = 1 = f_D(0)$$



D'autre part, on a :

• $D_{0,3} = \{z \in \mathbb{R} \,/\, f_D(z) \geq 0,3\}$. Or :

* pour $-4 \leq z < 0$, $f_D(z) = \frac{z+4}{4-z} = 0,3 \Rightarrow z+4 = 1,2-0,3z$

$$\Rightarrow 1,3z = -2,8 \Rightarrow z = -\frac{28}{13} = -2,15$$

* pour $0 < z \leq 9$, $f_D(z) = \frac{9-z}{9+z} = 0,3 \Rightarrow 9-z = 2,7 + 0,3z$

$$\Rightarrow 1,3z = 6,3 \Rightarrow z = \frac{63}{13} \simeq 4,85$$

Ainsi :

$$D_{0,3} = \{z \in \mathbb{R} \,/\, -2,15 \leq z \leq 4,85\} = \left[-\frac{28}{13} ; \frac{63}{13}\right]$$

• $D_{0,7} = \{z \in \mathbb{R} \,/\, f_D(z) \geq 0,7\}$. Or :

* pour $-4 \leq z < 0$, $f_D(z) = \frac{z+4}{4-z} = 0,7 \Rightarrow z+4 = 2,8 - 0,7z$

$$\Rightarrow 1,7z = -1,2 \Rightarrow z = -\frac{12}{17} \simeq -0,71$$

* pour $0 < z \leq 9$, $f_D(z) = \frac{9-z}{9+z} = 0,7 \Rightarrow 9-z = 6,3 + 0,7z$

$$\Rightarrow 1,7z = 2,7 \Rightarrow z = \frac{27}{17} \simeq 1,59$$

Ainsi :

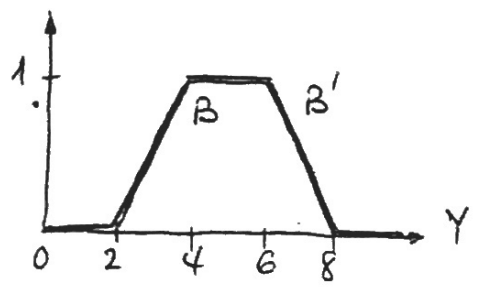
$$D_{0,7} = \{z \in \mathbb{R} \,/\, -0,71 \leq z \leq 1,59\} = \left[-\frac{12}{17} ; \frac{27}{17}\right]$$

<u>Exercice 2</u> :

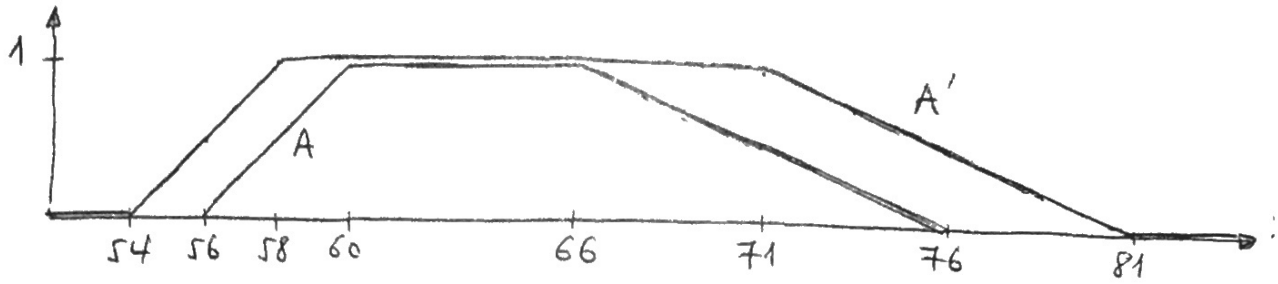
Soit la règle floue : " si V est A alors W est B ", où V est l'âge d'un individu, W est la vue, A = " vieux " une caractérisation floue de V définie par trapèze (56, 60, 66, 76), et B = " médiocre " une caractérisation floue de W définie par trapèze (2, 4, 6, 8).

1) <u>Cas où l'observation A' = very(A)</u> :

On a $A' \subseteq A$ et l'observation est donc plus spécifique et plus précise que la prémisse A de la règle. Les implications R^W, R^{KD}, R^L et R^M donnent toutes $B' = B$.



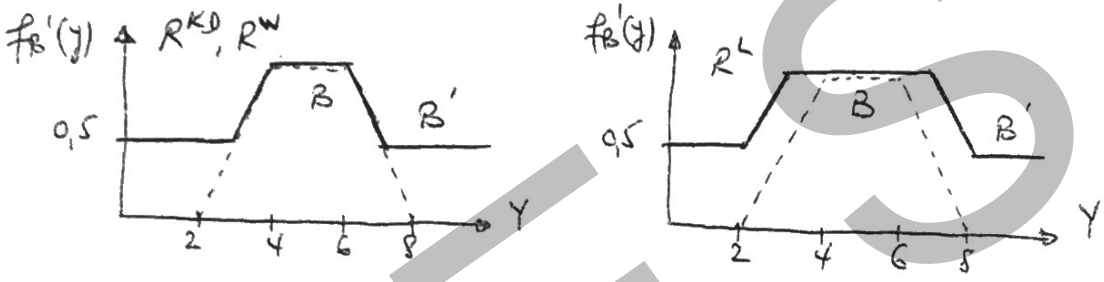
2) Cas où l'observation A' est moins spécifique que A :



On a :

$$\varepsilon = \sup_{x \in X} T_L\left[f_{A'}(x), 1 - f_A(x)\right] = \sup_{x \in X} \max\left[f_{A'}(x) - f_A(x), 0\right]$$

$= 0{,}5$ pour R^W, R^{KD} et R^L

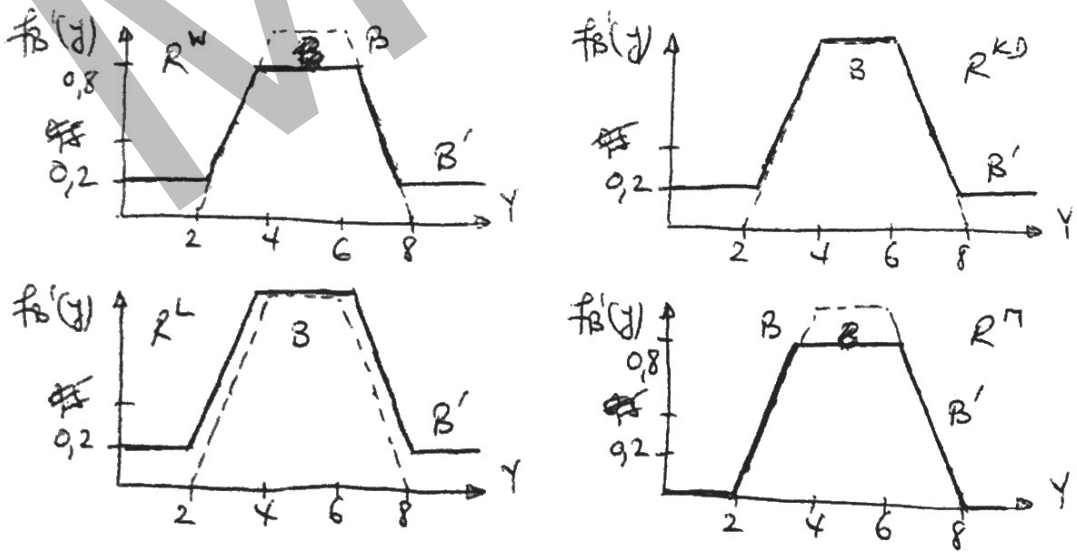


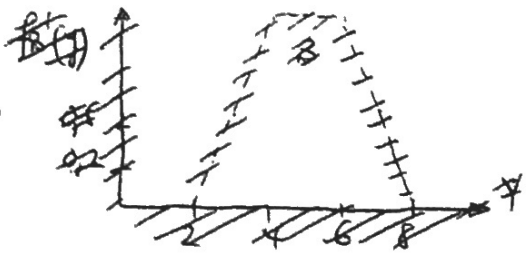
Sur l'implication de Rawdon (R^M), $B' = B$.

3) Cas où l'observation A' est un singleton $\{68\}$:

On a :

$$f_A(68) = 0{,}8 \Rightarrow \varepsilon = 1 - f_A(68) = 0{,}2$$

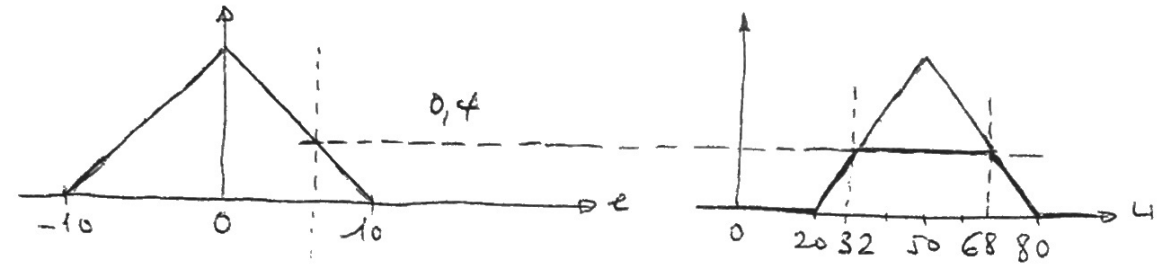


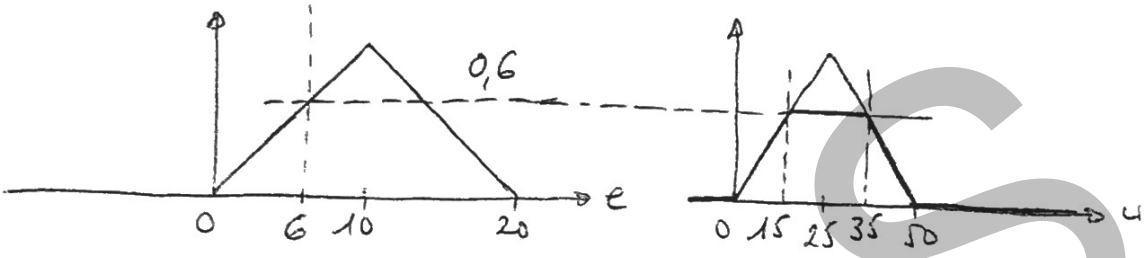


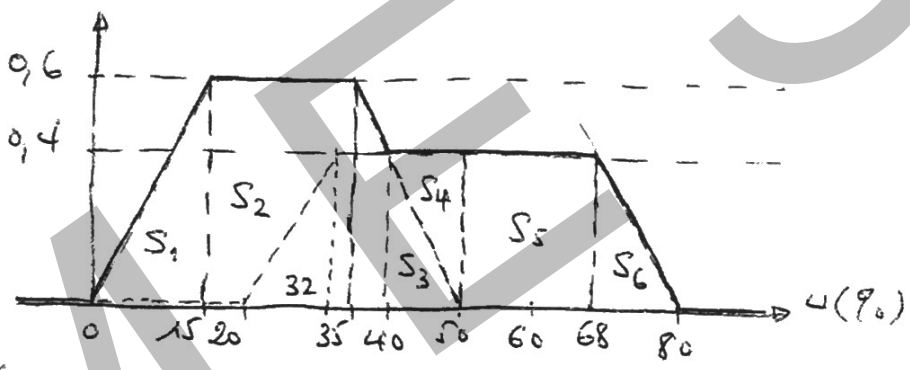
D

Exercice 4 :

1) Cas où $A' = \{6\%\}$:







$$u_0 = \frac{\sum_{i=1}^{6} u_i S_i}{\sum_{i=1}^{6} S_i}$$, avec :

$S_1 = \frac{1}{2} \times 15 \times 0{,}6 = 4{,}5$; $S_2 = 20 \times 0{,}6 = 12$; $S_3 = \frac{1}{2} \times 0{,}6 \times 15 = 4{,}5$;

$S_4 = \frac{1}{2} \times 10 \times 0{,}4 = 2$; $S_5 = 18 \times 0{,}4 = 7{,}2$; $S_6 = \frac{1}{2} \times 12 \times 0{,}4 = 2{,}4$;

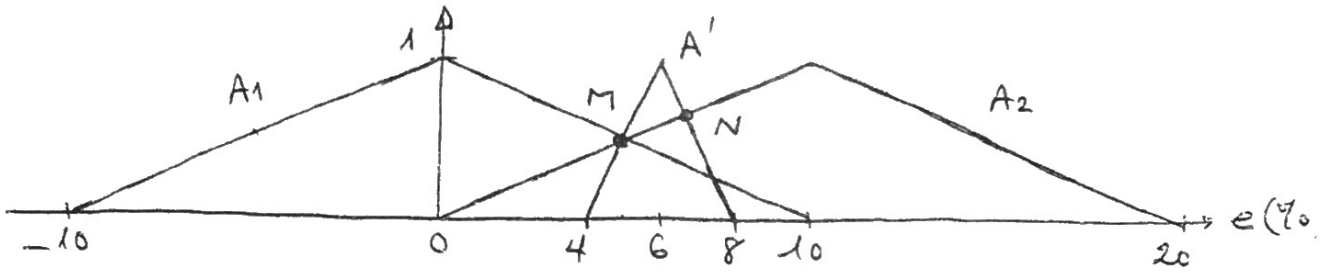
$u_1 = 10$; $u_2 = 25$; $u_3 = 40$; $u_4 = 46{,}67$; $u_5 = 59$; $u_6 = 72$

On déduit :

$$u_0 = \frac{1215{,}97}{32{,}6} = 37{,}3\ \%$$

E

2) <u>Cas où A' = triangle (4,6,8) :</u>



Sur une règle :

R_i : si e est A_i alors u est B_i

Le résultat en conclusion intermédiaire B'_i par l'observation A' se caractérise par :

$$\forall u \in \mathbb{R}, \quad f_{B'_i}(u) = \sup_{e \in \mathbb{R}} \min\left[f_{A'}(e), \min\left[f_{A_i}(e), f_{B_i}(u)\right]\right]$$

$$= \sup_{e \in \mathbb{R}} \min\left[\min\left[f_{A'}(e), f_{A_i}(e)\right], f_{B_i}(u)\right]$$

Sur R1, commençons par chercher les coordonnées du point M. On a :

$$-\frac{1}{10}(x_M - 10) = \frac{1}{2}(x_M - 4) \Rightarrow 0{,}6\, x_M = 3 \Rightarrow x_M = 5\ \%$$

Donc :

$$y_M = \frac{1}{2}(x_M - 4) = 0{,}5$$

et l'on a :

$$f_{B'_1}(u) = \min\left[\sup_{e \in \mathbb{R}} \min\left[f_{A'}(e), f_{A_1}(e)\right]; f_{B_1}(u)\right]$$

$$= \min\left[0{,}5 ; f_{B_1}(u)\right]$$

Sur R2, commençons par chercher les coordonnées du point N. On a :

$$\frac{1}{10} x_N = -\frac{1}{2}(x_N - 8) \Rightarrow 0{,}6\, x_N = 4 \Rightarrow x_N = 20/3 = 6{,}67\ \%$$

Donc :

$$y_N = \frac{x_N}{10} = 2/3 \simeq 0{,}67$$

et l'on a :

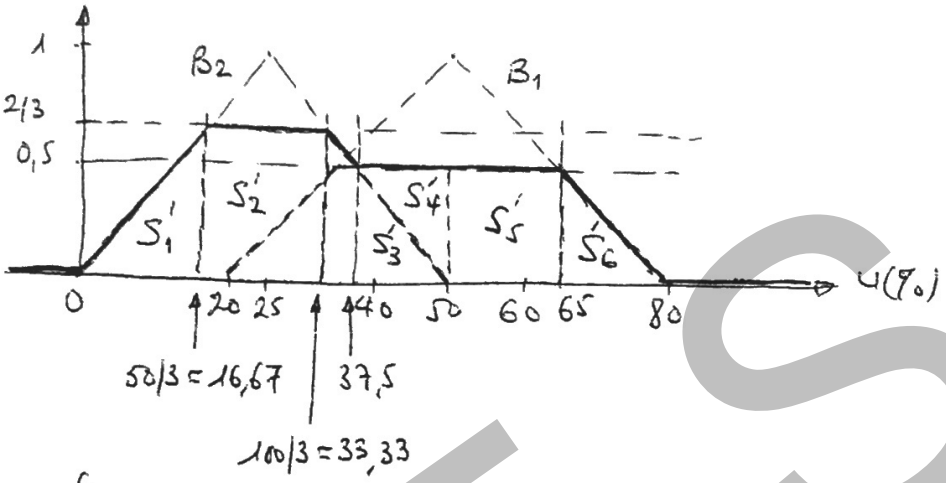
$$f_{B'_2}(u) = \min\left[\sup_{e \in \mathbb{R}} \min\left[f_{A'}(e), f_{A_2}(e)\right]; f_{B_2}(u)\right]$$

$$= \min\left[0{,}67 ; f_{B_2}(u)\right]$$

F

La conclusion ou résultat flou de l'ensemble des deux règles est ainsi caractérisé par :

$$f_{B'}(u) = \max\left[f_{B'_1}(u),\ f_{B'_2}(u) \right]$$
$$= \max\left[\min[0{,}5 ;\ f_{B_1}(u)],\ \min[0{,}67 ;\ f_{B_2}(u)] \right],\ \forall u \in \mathbb{R}$$



$$u'_0 = \frac{\sum_{i=1}^{6} u'_i S'_i}{\sum_{i=1}^{6} S'_i}, \text{ avec :}$$

$S'_1 = \frac{1}{2} \times 16{,}67 \times \frac{2}{3} = 5{,}56$; $S'_2 = \frac{2}{3} \times 16{,}67 = 11{,}11$; $S'_3 = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times 16{,}67 = 5{,}56$;
$S'_4 = \frac{1}{2} \times 0{,}5 \times 12{,}5 = 3{,}125$; $S'_5 = 0{,}5 \times 15 = 7{,}5$; $S'_6 = \frac{1}{2} \times 0{,}5 \times 15 = 3{,}75$;
$u'_1 = 11{,}11$; $u'_2 = 25$; $u'_3 = 38{,}89$; $u'_4 = 45{,}83$; $u'_5 = 57{,}5$; $u'_6 = 70$

On déduit :

$$u'_0 = \frac{1392{,}72}{36{,}605} = 38{,}05\ \%$$

L'écart dû à l'imprécision est ainsi :

$$\left| \frac{u'_0 - u_0}{u_0} \times 100 \right| = 2{,}01\ \%$$

<u>Exercice 3</u> :

Soit le relation floue R définie par :

$$f_R(x,y) = e^{-(x-y)^2},\ (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

- $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_R(x,x) = 1 \Rightarrow R$ est réflexive

- $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f_R(x,y) = f_R(y,x) \Rightarrow R$ est symétrique

- Vérifions si R est transitive, i.e. $R \circ R \subseteq R$, on écrit :

$$\forall (x,z) \in \mathbb{R}^2, \quad \sup_{y \in \mathbb{R}} \min\left[f_R(x,y), f_R(y,z)\right] \leq f_R(x,z)$$

Pour cela, soit $\mathbb{R}_1(x,z)$ ~~l'ensemble des y~~ $= \{y \in \mathbb{R} \,/\, |x-y| \leq |y-z|\}$ pour un couple (x,z) donné. ~~Donc~~ On a ainsi :

$$\forall (x,z) \in \mathbb{R}^2, \quad \sup_{y \in \mathbb{R}} \min\left[f_R(x,y), f_R(y,z)\right]$$

$$= \sup\left\{\sup_{y \in \mathbb{R}_1(x,z)} f_R(y,z), \sup_{y \in \mathbb{R}-\mathbb{R}_1(x,z)} f_R(x,y)\right\}$$

$$= \max\left\{\sup_{y \in \mathbb{R}_1(x,z)} e^{-(y-z)^2}, \sup_{y \in \mathbb{R}-\mathbb{R}_1(x,z)} e^{-(x-y)^2}\right\}$$

$$= \max\left\{\exp\left[-\left(\frac{x-z}{2}\right)^2\right], \exp\left[-\left(\frac{x-z}{2}\right)^2\right]\right\} =$$

$$= \exp\left[-\left(\frac{x-z}{2}\right)^2\right] \geq \exp\left[-(x-z)^2\right] = f_R(x,z)$$

Donc, R n'est pas transitive et, par conséquent, ne peut pas être une relation de similarité.