

Chap 5: Polynomes et fonction rationnel

• Une fonction polynome est de la forme :

$$- P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

si $a_n \neq 0$, degré de $P(x) = n$

ex: $\deg x^2 + 3 = 2$

$\deg x^3 + x = 3$

$\deg 2 = 0$

$\deg 0 = -\infty$ par convention

• Soit $P = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ et $Q = \sum_{k=0}^m b_k x^k$ deux polynomes

$P = Q \Leftrightarrow \forall k \in [0, n] \quad a_k = b_k$ avec $n = m$

$P + Q = \sum_{k=0}^{\max(n,m)} (a_k + b_k) x^k$ avec $n > m$

$\lambda P = \sum_{k=0}^n (\lambda a_k) x^k$

$P \cdot Q = \sum_{k=0}^{n+m} c_k x^k$ où $c_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j$

• Soient P un polynome de degré n et Q de degré m

$\deg(\lambda P) = \deg P$

$\deg(P+Q) \leq \max(\deg P, \deg Q)$: si $n < m$ $\deg(P+Q) = m$, si $m = n$ alors si $a_n + b_n \neq 0$ $\deg(P+Q) = n$

$\deg(PQ) = \deg P + \deg Q$ sinon $\deg(P+Q) < n$

• Soit $P = x^3 + 3x + 2$ } $POQ = (x-1)^3 + 3(x-2) + 2$
 $Q = x-1$ } $QOP = (x^3 + 3x + 2) - 1$ $\Rightarrow POQ \neq QOP$

$\deg(PQ) = \deg(QP) = \deg P + \deg Q$

* Si P est un polynome pair $P(x) = P(-x)$ alors tous les coef impair sont nuls

Arithmétique sur les polynomes

• P divise Q ($P|Q$) $\Leftrightarrow \exists D \in K[x]$ tel que $Q = PD$

• $P|Q \Rightarrow \deg P \leq \deg Q$

• Si $P|Q$ et $\deg P = \deg Q$ alors P et Q sont associés càd $Q = \lambda P$

• Si $P|Q$ et $Q|P$ alors P et Q sont associés

• Si $P|Q$ et $Q|R$ alors $P|R$

• Si $R|P$ et $R|Q$ alors $\forall u, v \in K[x] \quad R|uP + vQ$

Division euclidienne

Soit $A, B \in K[x]$ avec $B \neq 0$ alors $\exists! Q, R$ telle que $A = BQ + R$ avec $\deg R < \deg B$

$\deg R < \deg B \begin{cases} \deg R = -\infty \Rightarrow R = 0 \\ 0 < \deg R < \deg B \end{cases}$

NB: La division des polynomes est considérée à une constante près

PGCD et PPCM des polynomes

Tout diviseur commun à A et B de degré maximal et appelé PGCD de A et B noté ANB

Tout multiplicateur commun à A et B de degrés minimal et appelé PPCM de A et B noté AVB

• $ANB = A$

• $AVB = B$

• $ANB = BNR$ où $A = BQ + R$

• ANB est un polynome unitaire

• Si $A|B$ alors $\text{pgcd}(A, B) = \frac{1}{\lambda} A$ où λ est le coef dominant de A

• Pour $\lambda \in K$, $\text{pgcd}(\lambda A, B) = \text{pgcd}(A, B)$

* Soit $A, B \in K[x]$ et $D = \text{PGCD}(A, B)$, il $\exists u, v \in K[x]$ tel que $Au + Bv = D$

→ Théorème de Bezout

$Au + Bv = D$

* $A, B \in K[x]$ sont premiers entre eux si $ANB = 1$

↳ $\exists u, v \in K[x]$ telle que $Au + Bv = 1$

• Soit $A, B \in K[x]$ avec $D = ANB$, $\exists A', B' \in K[x]$ tel que $A = DA'$ et $A'NB' = 1$

$B = DB'$

• $C|A$ et $C|B$ alors $C|ANB$

• Si $A|BC$ et $ANB = 1$ alors $A|C$ → Théorème de Gauss

• Soit $A, B \in K[x]$ tel que $ANB = 1$ alors $\forall (n, m) \in \mathbb{N}^2$ $A^n n B^m = 1$

Racines et Factorisation

• Soit $P \in K[x]$, α est une racine de $P \Leftrightarrow P(\alpha) = 0$

• $P(\alpha) = 0 \Leftrightarrow (x - \alpha) | P$

• α est une racine de multiplicité $K \Leftrightarrow (x - \alpha)^K | P$ et $(x - \alpha)^{K+1}$ ne divise pas P

• Soit $P = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ alors $P' = \sum_{k=1}^n a_k x^{k-1} \Rightarrow \deg(P') = \deg(P) - 1$

$\Rightarrow P = cte \Rightarrow P' = 0$

• α est une racine de multiplicité $K \Leftrightarrow P(\alpha) = 0, P'(\alpha) = 0, \dots, P^{(K-1)}(\alpha) = 0$ et $P^{(K)}(\alpha) \neq 0$

Théorème de d'Alembert - Cours

Tout polynôme de degré $n \geq 1$ admet au moins une racine dans \mathbb{C} .
Il admet exactement n racines si on les compte avec leur multiplicité.

- Soit $P \in K[x]$ de degré ≥ 1 si P est irréductible alors $\forall Q \in K[x]$
si Q divise P alors $Q \in K^*$ ou $-Q = \lambda P$
- Tout polynôme non constant $A \in K[x]$ s'écrit comme produit de polynôme irréductible unitaire tel que $A = P_1^{k_1} \dots P_r^{k_r}$
- ↳ Sur $\mathbb{C}[x]$, les polynômes irréductibles sont de degré 1 ainsi le théorème devient sur \mathbb{C}
 $\forall P \in \mathbb{C}[x] \quad P = \lambda (x-\alpha)^{k_1} \dots (x-\alpha_r)^{k_r}$

Fraction rationnelle

- Une fraction rationnelle est de la forme $F = \frac{A}{S}$ où $A, S, F \in K[x]$ et $S \neq 0$
- On dit que F est irréductible si $A \wedge S = 1$
- Soit $\frac{P}{Q}$ un fraction irréductible, $\frac{P}{Q}$ s'écrit d'une manière unique comme la somme
 - d'une partie polynomiale $E(x)$
 - d'éléments simples du type $\frac{a}{(x-\alpha)^i}$
 - d'éléments simples du type $\frac{ax+b}{(x^2+\alpha x+\beta)^i}$ (où $(x-\alpha)$ et $(x^2+\alpha x+\beta)$ sont des facteurs irréductibles de $\mathbb{Q}(x)$.)

MOUVEMENT
DE L'ESIB
SOLIDAIRE