

Chapitre 5: Mouvement dans un champ de forces centrales

1 - Forces centrale (force qui ne depend que de la distance de M à un pts O)

- force attractive si elle est orientée vers O
- force repulsive dans le cas contraire

Cas particulier d'un champs Newtonien:

Si la force est centrale et de la forme $f(M) = \frac{-K}{M^2}$ cette force constitue un champs Newtonien.

ex: Interaction gravitationnel

$$\vec{f}_{(M \rightarrow M_2)} = -G \frac{m_1 m_2}{M^2} \text{ unité de la forme } \frac{-K}{M^2} \quad -K = G m_1 m_2$$

ex: Interaction électrostatique

$$\vec{f}_{(q_1 \rightarrow q_2)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{M^2} \text{ unité de la forme } \frac{-K}{M^2} \quad -K = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_1 q_2$$

Le champs Newtonien étant un champs conservatif,

$$\delta W = f(M) dOM = -dEP$$

$$\text{d'où } EP = -\int f(M) dM + cte = -\int \frac{-K}{M^2} dM + cte = \frac{-K}{2} + cte$$

$$\text{Quand } M \rightarrow \infty \quad EP(\infty) = 0 \Rightarrow cte = 0 \rightarrow \boxed{EP = \frac{-K}{2}}$$

2 - Lois générales de conservation

$$\frac{dL_{1,0}}{dt} = m \vec{g}_{1,0} = OM \wedge \vec{p}_M = 0 \Rightarrow L_{1,0} = cte$$

\hookrightarrow Mvt plan



Loi des aires

$$\vec{L}_{1,0} = \vec{OM} \wedge m \vec{v} = M \vec{OM} \wedge m (\dot{M} \vec{u}_2 + M \dot{\theta} \vec{u}_\theta) = m M^2 \dot{\theta} \vec{u}_2 = cte$$

$$\hookrightarrow \frac{L_0}{m} = r^2 \dot{\theta} = cte \text{ des aires} = C$$

L'aire balayée par OM entre 2 instant θ_1 et θ_2 est $dA = \frac{C}{2} d\theta = \frac{r^2 \dot{\theta}}{2} d\theta$ (elle est appelée vitesse areolaire)

Formule de Binet:

En appliquant le PFD en coordonnées polaires avec un changement de variable $u = \frac{1}{r}$ on obtient

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = -\frac{1}{C^2 m u^2} f\left(\frac{1}{u}\right) \Rightarrow v^2 = C^2 \left[\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2 \right]$$

Conservation de L'Em d'une force centrale

$$E_m = E_c + E_p = cte \quad E_p = \frac{-K}{r} + cte \quad E_c = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m r^2 \dot{\theta}^2$$

$$E_m = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m r^2 \dot{\theta}^2 + E_p \quad \text{ou} \quad C = r^2 \dot{\theta}$$

$$E_m = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m \frac{C^2}{r^2} + E_p$$

On pose $E_{peff} = \frac{1}{2} m \frac{C^2}{r^2} + E_p$ terme qui ne depend que de r

$$E_m = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + E_{peff} = cte$$

Etat de diffusion, etats lies

$E_{peff} \leq E_m$ où E_{peff} ne depend que de r

Si $r > r_{min}$ on parle d'etat de diffusion

Si $r_{min} < r < r_{max}$ on parle d'etat lie

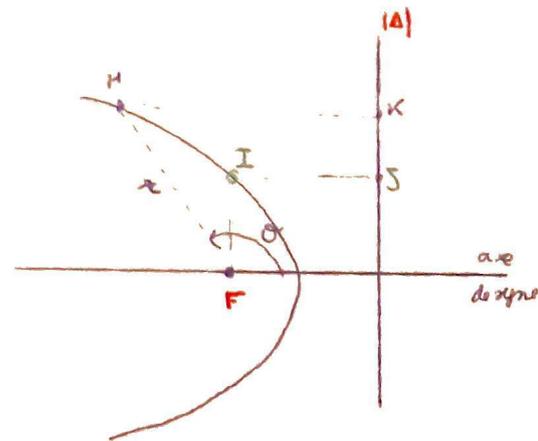
Les coniques

Soit un conique de Foyer F et de directrice Δ

On appelle e l'excentricite de la conique tel que

$$e = \frac{MF}{\pi K} \quad \text{K est l'ordonnee de M}$$

I est le pts tel que $IF \perp$ à l'axe de symetrie on pose $IF = p$



L'equation d'une conique en coordonnees polaires s'ecrit

$$r(\theta) = \frac{p}{1 + e \cos(\theta)}$$

si $e = 0$ M decrit un cercle avec $r = p = cte$ → etat lie

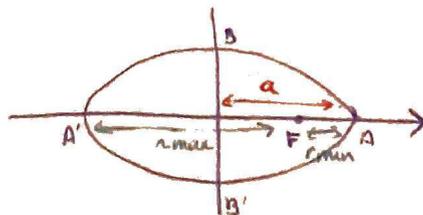
si $e = 1$ M decrit une parabole avec $r > \frac{p}{2}$ → etat de diffusion

si $e > 1$ M decrit une hyperbole avec $r > \frac{p}{1+e}$ → etat de diffusion

si $e < 1$ M decrit une ellipse avec $\frac{p}{1+e} < r < \frac{p}{1-e}$ → etat lie

pour une ellipse :

- on nomme A le perigee
- A' l'apogee



Dans le cas d'une interaction tene-soliel

F : centre du soleil

A : perihelie

A' : aphelie

Mouvement des planètes et lois Kepler

1^{er} loi : Le movt de chacune des planètes autour du soleil est un movt elliptique de période T appelé période de révolution de la planète autour du soleil et de demi-grand axe $= a$

2^{eme} loi : loi des aires

$$\text{vitesse angulaire} = \frac{dA}{dt} = cte = \frac{C}{2} = \frac{\text{aire l'ellipse}}{t} = \frac{\pi AB}{T}$$

3^{eme} loi :

$$\frac{T^2}{a^3} = cte = \frac{4\pi^2}{G M_S}$$

Vitesse cosmique

1) vitesse circulaire : c'est la vitesse à communiquer initialement à un corps pour qu'il devienne un orbite circulaire de rayon R_T autour de la Terre de masse m_T

$$v_c = \sqrt{\frac{G m_T}{R_T}} = \sqrt{\frac{g_0 R_T^2}{R_T}} = \sqrt{g_0 R_T}$$

2) vitesse de libération : c'est la vitesse à communiquer initialement à un corps pour qu'il échappe à l'attraction de la Terre de masse M_T

$$\sqrt{\frac{2G m_T}{R_T}} = \sqrt{2 g_0 R_T} = \sqrt{2} v_c \rightarrow \text{vitesse parabolique}$$