Chapitre 4 : Theorème du moment cinetique

* Rappel du produit vectoriel : $a \wedge b$

- direction $\perp$ à a et à b
- sens ; progression d'un tournevis
- Module : $|\vec{a} \wedge \vec{b}| = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \times |\sin(a,b)|$

$$\begin{vmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \\ a_z & b_z \end{vmatrix} \quad (a_y b_z - a_z b_y) u_x + (a_x b_z - a_z b_x) u_y + (a_x b_y - a_y b_x) u_z$$

- $\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \wedge \vec{b} = 0$
- $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow |\vec{a} \wedge \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}|$

* Moment d'une Force $\vec{f}$

- en un point O : $M_{f\%O} = \vec{OM} \wedge \vec{F}$
- par rapport à un axe Δ : $M_{f\%\Delta} = M_{f\%O} \cdot \vec{u}_\Delta$

en cordonné polaire :

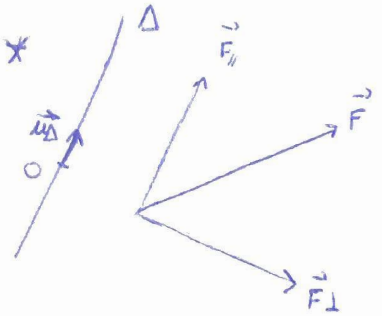
$OM = OH + HM = M u_r + z u_z$

$\vec{f} = f_r \vec{u_r} + f_\theta \vec{u_\theta} + f_z \vec{u_z}$

$M_{f\%O} = OM \wedge f = (-z f_\theta) \vec{u_r} - (M f_z - z f_H) \vec{u_\theta} + M f_\theta \vec{u_z}$

$M_{f\%O_z} = M_{f\%O} \cdot u_z = M f_\theta$

*



$\vec{F} = \vec{F}_{\parallel} + \vec{F}_\perp$

$\hookrightarrow M_{F\%\Delta} = (\vec{OM} \cdot \vec{F}) \cdot u_\Delta = (\underbrace{\vec{OM} \wedge \vec{F}_{\parallel}}_{=0} + \vec{OM} \wedge \vec{F}_\perp) u_\Delta = (OM \wedge F_\perp) \cdot \vec{u}_\Delta$

* Si $\vec{F} \perp \Delta$: $M_{f\%\Delta} = OM \wedge F = |\vec{OM}| |\vec{F}| \underbrace{|\sin OM, F|}_{=1} = \|OM\| \|F\|$

→ si $M_{f\%\Delta} > 0$ càd que $\vec{F}$ tend à faire tourner M dans le sens + de rotation

→ si $M_{f\%\Delta} < 0$ càd que $\vec{F}$ tend à faire tourner M dans le sens contraire.

* Moment cinetique dans un Rg

La quantité de mouvement "p" est definie par $p = m \cdot v$

- Moment cinetique de M % O : $L_{\%O} = \vec{OM} \wedge \vec{P}$

Si L est constante et $\perp$ un plan on dit que le mvt de M est un mvt plan.

- Moment cinetique % à une axe Δ

$$L_{\%\Delta} = L_{\%O} \wedge \vec{u}_\Delta$$

• Cas d'un mvt circulaire:

$$L_{/O} = \vec{OM} \wedge m\vec{v}$$
$$= R\vec{u_r} \wedge mv\vec{u_\theta}$$
$$= mRv\,\vec{u_z} \qquad (\text{car } \vec{u_r} \wedge \vec{u_\theta} = \vec{u_z})$$

or $v = R\dot{\theta}$

$$L_{/O} = mR^2\dot{\theta}\,\vec{u_z}$$

Theorème du moment cinetique

$$* \quad \frac{dL_{/O}}{dt} = m_{f/O} = \vec{OM} \wedge \vec{F}$$

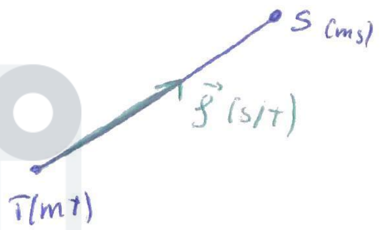
Demême : $\frac{dL_\Delta}{dt} = m_{f/\Delta}$

$\Rightarrow$ D'apres le theorème du moment cinetique, si $m_{/\Delta}$ ou $m_{/O} = \vec{0}$ alors L_Δ ou $L_{/O} = cte$

$\Rightarrow$ Mvt plan de M

Application

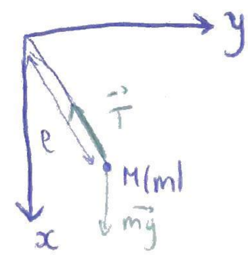
a) Mvt de la Terre autour du Soleil



$$\vec{f}_{S\to T} = \pm \frac{G\,m_S m_T}{r^2}\,u$$
$$M_{f_{S\to T}/S} = \underbrace{\vec{ST} \wedge \vec{f}}_{\text{car } \vec{ST} \parallel \vec{f}} = \vec{0} \Rightarrow \vec{L}_{(\text{terre})/S} = \vec{cte}$$

$\hookrightarrow$ Mvt plan

b) Cas du pendule simple.



$$M_{f/O} = \vec{OM} \wedge (\vec{T} + m\vec{g})$$
$$= \cancel{\vec{OM} \wedge \vec{T}} + \vec{OM} \wedge m\vec{g} = -l\sin\theta \cdot mg\,u_z$$

$$L_{/O} = \vec{OM} \wedge m\vec{v} = l\vec{u_r} \wedge ml\dot{\theta}\vec{u_\theta} = ml^2\dot{\theta}\,\vec{u_z}$$

$$\frac{dL_{/O}}{dt} = mL^2\ddot{\theta}\,u_z = -l\sin\theta \cdot mg\,u_z$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0}$$