MOUVEMENT DE L'ESIB SOLIDAIRE

Partiel 2015

Corrigé

Algèbre

SPE

Semestre 1

Novembre 2015

Composition : Algèbre linéaire

Exercice 1 :

1- Soit λ une valeur propre de A.

$$|A-\lambda I_3| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & -\lambda & 2 \\ -1 & -2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & -\lambda & 2 \\ 0 & \lambda-2 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$|A-\lambda I_3| = (2-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & -\lambda & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (2-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$|A-\lambda I_3| = (2-\lambda)\left[(2-\lambda)(2-\lambda)-1\right]$$

$$|A-\lambda I_3| = (2-\lambda)\left[(2-\lambda)^2-1\right] = (2-\lambda)(2-\lambda+1)(2-\lambda-1)$$

$$|A-\lambda I_3| = (2-\lambda)(3-\lambda)(1-\lambda)$$

$|A-\lambda I_3| = 0$ donc $\lambda = 2$; $\lambda = 3$; $\lambda = 1$

Donc A admet 3 valeurs propres, d'où $sp(A) = \{1;2;3\}$

2- Pr $\lambda = 1$; $E_1 = Ker(A-I)$

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1 \Rightarrow (A-I)X = 0$

c.à.d. $AX - X = 0$
$AX = X$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

D'où le système : $\begin{cases} 2x - y = x & ① \\ -x + 2z = y & ② \\ -x - 2y + 4z = z & ③ \end{cases}$

① $\Rightarrow 2x - x - y = 0 \Rightarrow x - y = 0 \Rightarrow \boxed{x = y}$

② $\Rightarrow -y + 2z = y \Rightarrow -2y + 2z = 0 \Rightarrow 2z = 2y \Rightarrow \boxed{z = y}$

Donc $(x; y; z) = (y; y; y) = y(1; 1; 1)$

Donc $E_1 = Vect\{(1; 1; 1)\}$

* Pr $\lambda = 2$; $E_2 = Ker(A - 2I_3)$

Soit $X = (x; y; z) \in E_2$ $\quad (A - 2I)X = 0$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}$$

D'où le système : $\begin{cases} 2x - y = 2x & ① \\ -x + 2z = 2y & ② \\ -x - 2y + 4z = 2z & ③ \end{cases}$

② $\Rightarrow -x + 2z = 0 \Rightarrow \boxed{x = 2z}$

Alors $(x; y; z) = (2z; 0; z) = z(2; 0; 1)$

Donc $E_2 = Vect\{(2; 0; 1)\}$

* Pr $\lambda = 3$; $E_3 = \ker (A - 3I)$

Soit $X = (x ; y ; z) \in E_3$; $(A - 3I) X = 0 \Rightarrow AX = 3X$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x \\ 3y \\ 3z \end{pmatrix}$$

D'où le système : $\begin{cases} 2x - y = 3x & (1) \\ -x + 2z = 3y & (2) \\ -x + 2y + 4z = 3z & (3) \end{cases}$

$(1) \Rightarrow 3x - 2x = -y \Rightarrow \boxed{x = -y}$

$(2) \Rightarrow y + 2z = 3y \Rightarrow \boxed{2y = 2z} \Rightarrow \boxed{y = z}$

Alors, $(x ; y ; z) = (-y ; y ; y) = y(-1 ; 1 ; 1)$

$E_3 = \text{Vect} \{(-1 ; 1 ; 1)\}$

$A = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Ex. 2 :

$f_0(P) = P(0)$; $f_1(P) = P(1)$; $f_2(P) = P(2)$

1- Soit $\alpha \in \mathbb{R}$

Soient P et Q 2 polynômes qui appartiennent à $\mathbb{R}_2[X]$

• $f_0(\alpha P + Q) = (\alpha P + Q)(0) = \alpha P(0) + Q(0)$
$= \alpha f_0(P) + f_0(Q)$

Car P et Q sont des polynômes et les polynômes sont linéaires donc f_0 est linéaire.

• $f_1(\alpha P + Q) = (\alpha P + Q)(2) = \alpha P(2) + Q(2)$
$= \alpha f_2(P) + f_2(Q)$

f_2 est linéaire

2- $f_0 = \sum_{i=1}^{3} f_0(e'_i)e'^*_i$ avec $(e'_1, e'_2, e'_3) = (1, X, X^2)$ base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ et (e'^*_1, e'^*_2, e'^*_3) sa base duale ds $\mathbb{R}_2[X]$

$f_0 = f_0(e'_1)e'^*_1 + f_0(e'_2)e'^*_2 + f_0(e'_3)e'^*_3$
$= f_0(1)e'^*_1 + f_0(X)e'^*_2 + f_0(X^2)e'^*_3$

$f_0(1) = 1$
$f_0(X) = 0$
$f_0(X^2) = 0$

donc $f_0 = e'^*_1$

• $f_1 = f_1(1)e'^*_1 + f_1(X)e'^*_2 + f_1(X^2)e'^*_3$

$f_1(1) = 1$
$f_1(X) = 1$
$f_1(X^2) = 1$

donc $f_1 = e'^*_1 + e'^*_2 + e'^*_3$

$f_2(1) = 1$
$f_2(X) = 2$
$f_2(X^2) = 4$

- $f_2 = \sum_{i=1}^{3} f_2(e'_i)\, e'^*_i = f_2(1)\, e'^*_1 + f_2(X)\, e'^*_2 + f_2(X^2)\, e'^*_3$

donc $f_2 = e'^*_1 + 2e'^*_2 + 4e'^*_3$

Donc $T(f ; (e'^*_i)) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} = A$

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 2 = 2 \neq 0$

$rg(f_0 ; f_1 ; f_2) = 3$ Donc $\{f_0 ; f_1 ; f_2)$ sont linéairement Indépendants et $rg(f_0 ; f_1 ; f_2) = \dim E = 3$

Donc $(f_0 ; f_1 ; f_2)$ forme une Base de E

3- Soit $\{e_0 ; e_1 ; e_2\}$ une Base tq une Base duale $\{e^*_0 ; e^*_1 ; e^*_2\}$ est égale à $\{f_0 ; f_1 ; f_2\}$

- Soit $e_0(X) = aX^2 + bX + c$ avec $a ; b ; c \in \mathbb{R}$

$f_0(e_0) = 1 = e_0(0) = c \Rightarrow \boxed{c = 1}$

$f_1(e_0) = 0 = e_0(1) = a + b + c = 0 \Rightarrow a = -b - 1$

$f_2(e_0) = 0 = e_0(2) = 4a + 2b + c = 0 \Rightarrow 4(-b-1) + 2b + 1 = 0$

$-4b - 4 + 2b + 1 = 0$

$-2b - 3 = 0$

$a = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$; $\boxed{a = \frac{1}{2}}$

Donc $e_0(X) = \frac{1}{2} X^2 - \frac{3}{2} X + 1 = e'_1 - \frac{3}{2} e'_2 + \frac{1}{2} e'_3$

• Soit $e_1(X) = aX^2 + bX + c$

$f_0(e_1) = 0 \Rightarrow c = 0$

$f_1(e_1) = 1 \Rightarrow a + b + c = 1 \Rightarrow a = 1 - b$

$f_2(e_1) = 0 \Rightarrow 4a + 2b + c = 0 \Rightarrow 4(1-b) + 2b = 0$

$4 - 4b + 2b = 0$

$-2b = -4$

$a = 1 - 2 = -1$ $\boxed{a = -1}$

Donc $e_1(X) = -X^2 + 2X = 2e'_2 - e'_3$

• Soit $e_2(X) = aX^2 + bX + c$

$f_0(e_2) = 0 \Rightarrow c = 0$

$f_1(e_2) = 0 \Rightarrow a + b + c = 0 \Rightarrow a = -b$

$f_2(e_2) = 1 \Rightarrow 4a + 2b + c = 0 \Rightarrow -4b + 2b = 1$

$-2b = 1$

$\boxed{a = \frac{1}{2}}$ $\boxed{b = -\frac{1}{2}}$

Donc $e_2(X) = \frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{2}X = -\frac{1}{2}e'_2 + \frac{1}{2}e'_3$

Ex 3 :

E K-ev et $u : E \to E$

$\exists n > 0 ; u^n = 0$

Soit λ une valeur propre de u ; donc il existe $v \neq 0$ tq

$u(v) = \lambda v$ Or $\exists n > 0 ; u^n = 0$

donc $u^n(v) = 0 = \lambda^n v$

Alors $\lambda^n v = 0$. Or $v \neq 0$ donc $\lambda^n = 0$ Alors $\lambda = 0$

Donc la valeur propre de u est 0

$E_0 = \ker(u - \lambda I) = \ker(u)$

E_0 est le sous espace propre de u associé à la valeur propre $\lambda = 0$

Ex 4:

1- $\mathrm{Im}(u - Id) \subset \mathrm{Ker}(u^2 + u + Id)$

Soit $x \in \mathrm{Im}(u - Id)$; donc $\exists y \in E$ tq

$x = (u - Id)\, y = u(y) - Id(y) = u(y) - y$

$x \in \mathrm{Ker}(u^2 + u + Id)$ Si $(u^2 + u + Id)(x) = 0$

$\Leftrightarrow u^2(x) + u(x) + Id(x) = 0$

$\Leftrightarrow u^2(x) + u(x) + x = 0$

Or $x = u(y) - y$

donc $u^2(u(y) - y) + u(u(y) - y) + u(y) + y$

$= (u^2 + u + Id)(x)$

$\Leftrightarrow (u^2 + u + Id)(x) = u^3(y) - u^2(y) + u^2(y) - u(y) + u(y) + y$

Or $u^3 = Id$; donc $(u^2 + u + Id)(x) = y - y = 0$

donc $x \in \mathrm{Ker}(u^2 + u + Id)$

Par suite $\boxed{\mathrm{Im}(u - Id) \subset \mathrm{Ker}(u^2 + u + Id)}$

2- $E = \mathrm{Im}(u - Id) \oplus \mathrm{Ker}(u - Id)$

1) $\mathrm{Ker}(u - Id) \cap \mathrm{Im}(u - Id) = \{0\}$

Soit $x \in \mathrm{Ker}(u - Id) \cap \mathrm{Im}(u - Id)$

donc $x \in \mathrm{Ker}(u - Id)$ et $x \in \mathrm{Ker}(u - Id)$

car $\mathrm{Im}(u - Id)$

Donc $(u^2 + u + Id)\, x = 0$ et $x \in \mathrm{Ker}(u - id)$

$(u - Id)\, x = 0$

• $(u^2 + u + Id)\, x = 0$

$\Rightarrow u^2(x) + u(x) + u(x) = 0$

$\Rightarrow u^2(x) + 2u(x) = 0$

• $(u - Id)(x) = 0$

$\Rightarrow u(x) - x = 0$

$x = u(x)$

Ex 4 :

1- $\mathrm{Im}(u - Id) \subset \mathrm{Ker}(u^2 + u + Id)$

Soit $x \in \mathrm{Im}(u - Id)$; donc $\exists y \in E$ tq

$x = (u - Id)\, y = u(y) - Id(y) = u(y) - y$

$x \in \mathrm{Ker}(u^2 + u + Id)$ Si $(u^2 + u + Id)(x) = 0$

$\Leftrightarrow u^2(x) + u(x) + Id(x) = 0$

$\Leftrightarrow u^2(x) + u(x) + x = 0$

Or $x = u(y) - y$

donc $u^2(u(y) - y) + u(u(y) - y) + u(y) + y$

$= (u^2 + u + Id)(x)$

$\Leftrightarrow (u^2 + u + Id)(x) = u^3(y) - u^2(y) + u^2(y) - u(y) + u(y) + y$

Or $u^3 = Id$; donc $(u^2 + u + Id)(x) = y - y = 0$

donc $x \in \mathrm{Ker}(u^2 + u + Id)$

Par suite $\boxed{\mathrm{Im}(u - Id) \subset \mathrm{Ker}(u^2 + u + Id)}$

2- $E = \mathrm{Im}(u - Id) \oplus \mathrm{Ker}(u - Id)$

1) $\mathrm{Ker}(u - Id) \cap \mathrm{Im}(u - Id) = \{0\}$

Soit $x \in \mathrm{Ker}(u - Id) \cap \mathrm{Im}(u - Id)$

donc $x \in \mathrm{Ker}(u - Id)$ et $x \in \mathrm{Ker}(u - Id)$

car $\mathrm{Im}(u - Id)$

Donc $(u^2 + u + Id)\, x = 0$ et $x \in \mathrm{Ker}(u - id)$

$(u - Id)\, x = 0$

- $(u^2 + u + Id)\, x = 0$

$\Rightarrow u^2(x) + u(x) + u(x) = 0$

$\Rightarrow u^2(x) + 2u(x) = 0$

- $(u - Id)(x) = 0$

$\Rightarrow u(x) - x = 0$

$x = u(x)$