

Cours

Thermodynamique II

SPE

Semestre 1

Veillez respecter l'auteur de ce document.
Droits de reproduction et de diffusion réservés.

Chapitre 1: Généralités sur les transferts thermiques.

1- Introduction:

La thermodynamique 1 permet de prévoir la quantité totale d'énergie qu'un système doit échanger avec le milieu extérieur pour passer d'un état d'équilibre à un autre.

La thermodynamique 2, se propose de décrire quantitativement dans l'espace et dans le temps l'évolution des grandeurs caractéristiques du système, en particulier la température "T" entre les états d'équilibres initial et final.

2- Préliminaires mathématiques:

2.1- Différentielle d'une fraction d'une seule variable:

Soit $y = y(x)$

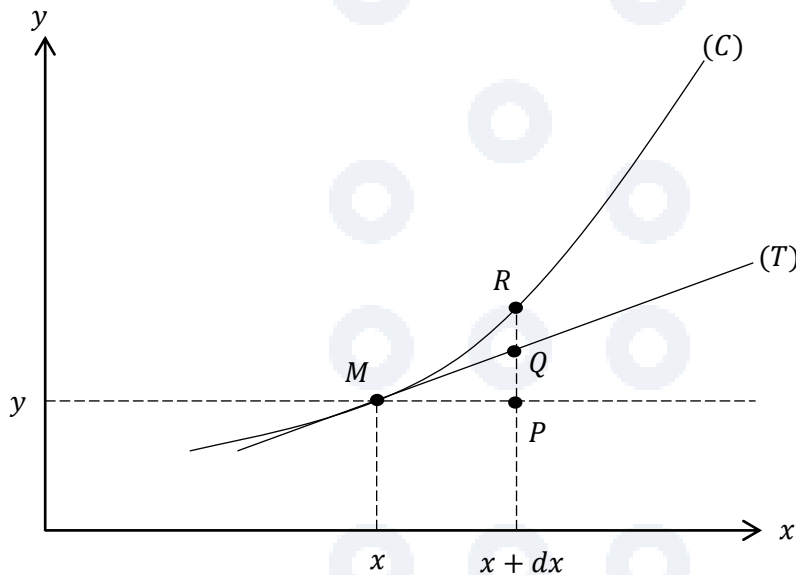
On définit la dérivée $y'(x)$ au point d'abscisse x , comme la limite $dx \rightarrow 0$

$$y'(x) = \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{y(x+dx) - y(x)}{dx}$$

On définit la différentielle dy comme la variation dy sous l'effet d'une variation dx .

$$dy = y(x+dx) - y(x) = \frac{dy}{dx} dx = y'(x) dx$$

Remarque: Interprétation géométrique de la différentielle.



La dérivée $\frac{dy}{dx}$ en M est la limite de la pente de la courbe MR, lorsque le point R tend vers M. C'est donc la pente de la tangente (T).

La différentielle $dy = \frac{dy}{dx} dx = PQ$ apparaît comme l'écart entre l'ordonnée du point Q d'abscisse $x+dx$ située sur la tangente. Donc c'est la variation de y mesurée sur la tangente (T).

La variation de y mesurée sur la courbe (C) est égale à PR. La différentielle PQ représente donc une estimation de PR obtenue en négligeant l'écart entre la courbe et sa tangente.

Exemple: $y = x^2$ $M(1; 1)$ $dx = 0.1$

$$T(x) = 2x - 1$$

$$P = (1; 1; 1) \quad Q = (1; 1; 1,2) \quad R = (1; 1; 1,21) \quad PQ = 0,2 \quad PR = 0,21 \quad (5\%)$$

2.2-Dérivées partielles d'une fonction de 2 variables:

Soit $f(x, y)$ une fonction à 2 variables. En considérant une des 2 variables x ou y comme une constante, nous sommes ramenés au cas d'une fonction à une seule variable, pour laquelle on peut définir la dérivée. Nous obtenons alors 2 dérivées partielles, l'une par rapport à x en maintenant y constante et l'autre par rapport à y en maintenant x constante.

$$\left(\frac{df}{dx}\right)_y = \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{f(x+dx; y) - f(x; y)}{dx}$$

$$\left(\frac{df}{dy}\right)_x = \lim_{dy \rightarrow 0} \frac{f(x; y+dy) - f(x; y)}{dy}$$

$$df = f(x+dx, y+dy) - f(x, y)$$

$$\text{Exemple: } f(x, y) = xy \quad df = (x+dx)(y+dy) - xy = xy + xdy + ydx + dx dy - xy = ydx + xdy + dx dy$$

$$df = \left(\frac{df}{dx}\right)_y \cdot dy + \left(\frac{df}{dy}\right)_x \cdot dx = ydx + xdy + dx dy$$

3.3-Gradient d'un champ scalaire:

Considérons un champ scalaire $f(M)$, c'est-à-dire une fonction scalaire qui est définie en tout point M de l'espace. Si on adopte un système de coordonnées cartésiennes (x, y, z) pour repérer le point M, la fonction scalaire $f(M)$ apparaît comme une fonction à 3 variables (x, y, z) .

- **Le gradient en coordonnées cartésiennes:**

$$df = f(x + dx, y + dy, z + dz) - f(x, y, z) = \left(\frac{df}{dx}\right)_{y,z} dx + \left(\frac{df}{dy}\right)_{x,z} dy + \left(\frac{df}{dz}\right)_{y,x} dz$$

$$d\vec{OM} = dx\vec{U}_x + dy\vec{U}_y + dz\vec{U}_z$$

$$\overrightarrow{\text{grad}}f = \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| \vec{U}_x + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \vec{U}_y + \left|\frac{\partial f}{\partial z}\right| \vec{U}_z$$

$$df = \overrightarrow{\text{grad}}f \cdot \vec{OM}$$

- **Le gradient en coordonnées cylindriques:**

$$f(r, \theta, z)$$

$$df = \left(\frac{df}{dr}\right)_{\theta,z} dr + \left(\frac{df}{d\theta}\right)_{r,z} d\theta + \left(\frac{df}{dz}\right)_{r,\theta} dz$$

$$d\vec{OM} = dr\vec{U}_r + d\theta\vec{U}_\theta + dz\vec{U}_z$$

$$\overrightarrow{\text{grad}}f = \left|\frac{\partial f}{\partial r}\right| \vec{U}_r + \frac{1}{r} \left|\frac{\partial f}{\partial \theta}\right| \vec{U}_\theta + \left|\frac{\partial f}{\partial z}\right| \vec{U}_z$$

- **Le gradient en coordonnées sphériques:**

$$f(r, \theta, \phi)$$

$$d\vec{OM} = dr\vec{U}_r + r d\theta\vec{U}_\theta + r \sin\theta d\phi\vec{U}_\phi$$

$$\overrightarrow{\text{grad}}f = \left|\frac{\partial f}{\partial r}\right| \vec{U}_r + \frac{1}{r} \left|\frac{\partial f}{\partial \theta}\right| \vec{U}_\theta + \frac{1}{r \sin\theta} \left|\frac{\partial f}{\partial \phi}\right| \vec{U}_\phi$$

3- Champ de température - Gradient de température - flux de chaleur:

- a) **Champ de température:**

On traitera dans le chapitre que les transferts d'énergie sont déterminés à partir de l'évolution dans l'espace et dans le temps de la température. La valeur instantanée de la température en tout point de l'espace est un scalaire appelé champ de température. On distingue deux cas:

- Un champ de température indépendant du temps, le régime est stationnaire ou permanent.
- Evolution du champ de température au cours du temps, dans ce cas le régime est transitoire ou variable.

- b) **Gradient de température:**

Si on réunit tous les points de l'espace ayant la même température, on obtient une surface dite surface isotherme. La variation de température par unité de longueur est maximale le long de la normale à la surface isotherme. Cette variation est caractérisée par le gradient de température.

- c) **Flux de chaleur:**

La chaleur s'écoule sous l'effet d'un gradient de température, des hautes vers les basses températures. La quantité de chaleur transmises par unité de temps et par unité de surface, d'une surface isotherme, est appelée "densité de flux thermique", ou bien

"flux thermique surfacique". notée ϕ ou $j_Q = \frac{1}{s} \frac{\delta Q}{dt}$ (W/m^2)

On appelle flux thermique, la quantité de chaleur transmise sur la surface S pendant l'unité de temps

$$\varphi \text{ ou } P = \frac{\delta Q}{dt} \text{ (W)}$$

4- Modes de transferts thermiques:

4.1- Conduction: (diffusion)

Il s'agit d'un transfert thermique dans la matière supposée sans mouvement macroscopique. Par exemple, si on chauffe une barre métallique à l'une de ses extrémités, la température va s'élever de proche en proche, tout au long de la barre, et l'élévation de la température va se manifester à l'autre extrémité, ce qui traduit donc la conduction thermique dans la barre. Ce phénomène prouve sa cause au niveau microscopique.

-Dans le cas d'un solide non métallique, la conduction est assurée par le transfert de proche en proche de l'énergie de vibration des atomes. Le porteur associé à ces ondes longitudinales et transversales est le phonon.

-Dans les métaux, la conduction est nettement dominée par le transfert des énergies de translation des électrons libres. En général, les bons conducteurs thermiques sont les métaux.

4.2- Convection:

A l'inverse de la conduction de type diffusif, qui s'effectue sous transfert macroscopique de matière, la convection correspond à des transports supportés par des mouvements macroscopiques de la matière. La convection concerne essentiellement les milieux fluides.

En effet, les différences de températures au sein du milieu, entraîne des mouvements convectifs. Par exemple:

- 1- L'air chaud au voisinage d'un radiateur d'une pièce d'habitation est plus léger, et tend ainsi à s'élever et à être remplacé par de l'air plus froid, provoquant de la sorte une convection qui tend à uniformiser la température de la pièce.
- 2- Les brises montantes et descendantes observées dans les vallées montagnardes sont des manifestations des phénomènes de convection.

Au cours de la journée, les pentes qui dominent les vallées s'échauffe sous l'action du soleil, ainsi que les basses couches d'air qui les surmontent. Cet air est plus chaud, donc plus léger que l'air situé au-dessus ou bien dans les vallées moins denses. Il a donc tendance à remonter, formant la brise de pente. L'air de la vallée froid est alors obligé de monter lui aussi afin de combler le vide laissé par l'air chaud qui s'est échappé vers le haut (par convection). On obtient donc une brise qui remonte les pentes et les vallées tant que le soleil chauffe les pentes. Quand le soleil, à l'inverse, cesse de chauffer les pentes en fin d'après-midi, le sol se refroidit rapidement. L'air de vallée refroidit et tend ainsi à s'écouler vers le fond de la vallée. La brise devient descendante.

a) Convection naturelle :

Elle se produit spontanément dans un fluide, dans lequel existe un gradient de température. Elle tend à uniformiser le champ de température, et à supprimer le transport convectif.

b) Convection forcée :

La convection forcée est beaucoup plus efficace que la convection naturelle, elle sert à réchauffer ou à refroidir un fluide. C'est le cas des échangeurs thermiques. Le principe consiste à établir un contact thermique entre 2 fluides à températures différentes et mis en mouvement forcé. Le contact thermique est assuré par un transport conductif, mais son efficacité est fortement augmentée par la convection forcée des fluides en contact.

4.3- Rayonnement :

Tout corps chauffé émet un rayonnement électromagnétique, ce rayonnement est appelé rayonnement thermique. Il ne s'agit pas d'un transfert thermique, car le rayonnement thermique peut se propager dans le vide, alors que la conduction ou la convection consiste en un transport matériel. Ce phénomène trouve sa cause au niveau microscopique. Le rayonnement thermique a comme origine le mouvement des charges électriques présentes dans la matière, et il est d'autant plus important que la température est plus élevée. En effet l'agitation thermique provoque l'accélération des charges responsables de l'émission. Le spectre émis est continu de l'ultraviolet jusqu'à l'infrarouge et d'autant plus décalé vers les hautes fréquences que la température est élevée.

On sait par exemple qu'un métal chauffé donne lieu à un phénomène d'incandescence. Le métal apparaît d'abord rougeâtre, puis jaune à mesure que la température augmente à température ambiante. C'est le rayonnement infrarouge qui domine.

Chapitre 2: Conduction et convection thermique.

1- Puissance thermique et flux thermique surfacique:

1-1 - Puissance thermique:

Si la température du milieu n'est pas uniforme, il se produit un transfert thermique, ou bien un écoulement de chaleur irréversible depuis les zones des hautes températures vers les zones des basses températures, dans le but de rétablir l'équilibre thermique. On appelle puissance thermique à travers une surface dS , la quantité de chaleur δQ qui traverse dS par unité de temps.

$$P = \phi = \frac{\delta Q}{dt} \quad (W)$$

1-2 - Flux thermique surfacique :

Pour un transfert thermique unidirectionnel suivant la direction (Ox) de vecteur unitaire \vec{U}_x . On définit le vecteur flux thermique surfacique \vec{j}_Q de même direction (Ox) , de même sens que le transfert thermique, et de module égal à la puissance thermique mais par unité de surface perpendiculaire à (Ox) .

Pour un élément de surface dS dont la normale de vecteur unitaire \vec{n} fait l'angle θ avec \vec{j}_Q , la quantité de chaleur qui traverse dS pendant le temps dt est :

$$\delta Q = j_Q dS \cos\theta dt$$

2 - Loi de Fourier – Conductivité thermique :

Le Flux thermique surfacique conductif est proportionnel en chaque point du milieu au gradient de température.

$$\vec{J}_Q = -\lambda \cdot \overrightarrow{\text{grad}} T$$

Le coefficient de proportionnalité λ qui dépend de la nature du milieu et de la température est appelé conductivité thermique. λ représente la quantité de chaleur transférée par unité de surface et par unité de temps, mais sous un gradient de température égal à 1K/m. En d'autres termes, λ mesure la capacité d'un corps à conduire la chaleur.

- le signe « - » traduit le fait que le transfert thermique s'effectue toujours dans le sens des températures décroissantes.
- La loi de Fourier n'est valable que pour de faibles gradients de températures.
- Dans le cas fréquent d'un transfert thermique unidirectionnel (exemple : (Ox)), la loi de Fourier s'écrit :

$$\vec{J}_Q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \vec{U}_x$$

$$P = \Phi = -\lambda S \frac{\delta T}{\delta x}$$

3 - L'équation de la chaleur :

3.1- Equation de la chaleur en régime thermique unidimensionnel :

A partir d'un **bilan d'énergie** dans un milieu de conductivité thermique λ , de chaleur massique c , et de masse volumique ρ qu'on suppose constantes, on démontre que la température $T(x, t)$ dépend de l'équation de chaleur.

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\rho c}{\lambda} \times \frac{\partial T}{\partial t}$$

On pose $K = \frac{\lambda}{\rho c}$ (diffusivité thermique en $m^2 \cdot s^{-1}$)

La diffusivité est une grandeur physique qui caractérise la capacité d'un matériau à transmettre un signal de température d'un point à un autre dans ce même matériau.

3.2- Equation de la chaleur en régime thermique tridimensionnel :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{1}{K} \cdot \frac{\partial T}{\partial t}$$

$$\Delta T = \frac{1}{K} \cdot \frac{\partial T}{\partial t}$$

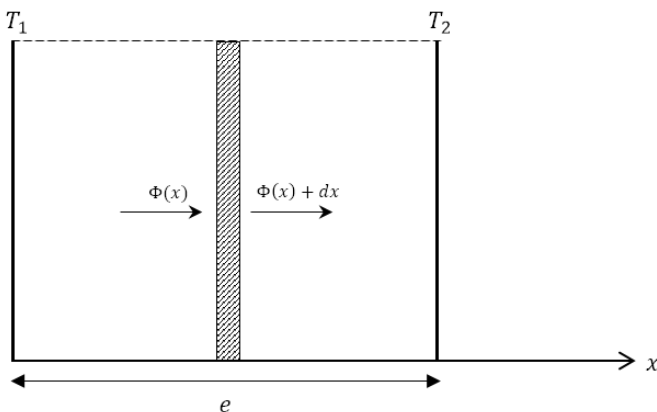
3.3- Equation de la chaleur avec un terme de source :

Si le milieu contient une source interne de chaleur qui libère (par effet joule, par réaction nucléaire ou chimique,...) une puissance thermique volumique $q(W \cdot m^{-3})$. L'équation de la chaleur devient :

$$\Delta T + \frac{q}{\lambda} = \frac{\rho c}{\lambda} \cdot \frac{\partial T}{\partial t}$$

4 - Etude des modèles élémentaires en régime permanent :

4.1- Modèle du mur :



a) Cas d'une seule couche : La figure ci-contre représente une coupe transversale d'un mur de surface S et d'épaisseur e . Ce mur est constitué d'un matériau de conductivité thermique λ . On note (T_1) la température de la paroi en $x = 0$, et (T_e) en $x = e$.

Considérons un volume élémentaire de paroi de surface S et d'épaisseur dx , situé entre l'abscisse x et $x + dx$. $\phi(x)$ est le flux qui entre dans le volume élémentaire en x , et $\phi(x + dx)$ est le flux sortant du volume élémentaire en $x + dx$.

$$\phi(x) - \phi(x + dx) = 0 \Rightarrow d\phi(x) = 0 \Rightarrow \phi(x) = \text{constante.}$$

$$\phi = -\lambda S \frac{dT}{dx}$$

$$-\lambda S dT = \phi dx$$

$$-\lambda S \int_{T_1}^{T_2} dT = \phi \int_0^e dx$$

$$-\lambda S(T_2 - T_1) = \phi e$$

$$\phi = \frac{T_1 - T_2}{e/\lambda S}$$

avec $e/\lambda S$ la résistance thermique du mur.

$$\phi = -\lambda S \frac{dT}{dx}$$

$$\phi \int_0^x dx = -\lambda S \int_{T_1}^{T(x)} dT$$

$$\phi x = -\lambda S(T(x) - T_1)$$

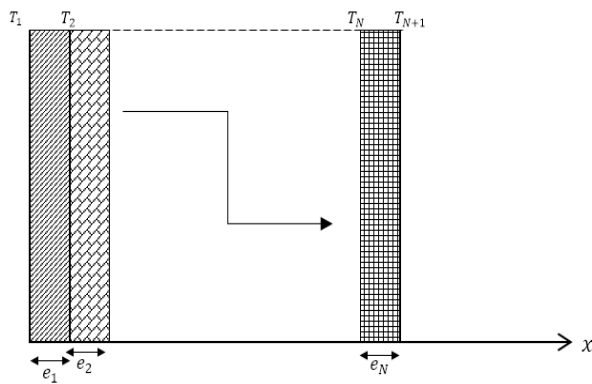
$$\frac{T_1 - T_2}{e/\lambda S} \cdot x = -\lambda S(T(x) - T_1)$$

$$T(x) = T_1 - \frac{T_1 - T_2}{e} \cdot x$$

Equation de la chaleur en régime permanent :

$$\Delta T = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \Rightarrow \frac{dT}{dx} = \text{constante} = a \Rightarrow T(x) = ax + b$$

$$a = \frac{T_2 - T_1}{e} = -\frac{(T_1 - T_2)}{e} ; \quad b = T_1$$



b) Cas de N couches enserrées :

La figure ci-contre représente une coupe transversale d'une paroi composée de N couches de surface S et d'épaisseurs respectives e_1, e_2, \dots, e_n et de conductivité thermique $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$.

On note T_1 la température en $x = 0$ et T_{N+1} la température en $x = \sum_{i=1}^N e_i$

On démontre que le flux thermique est: $\phi = \frac{T_1 - T_{N+1}}{\sum_{i=1}^N e_i/\lambda_i} \cdot S$

$$N = 2 : \phi_1 = \frac{T_1 - T_2}{e_1/\lambda_1 S} \quad \phi_2 = \frac{T_2 - T_3}{e_2/\lambda_2 S} \quad \phi = \frac{T_1 - T_2}{e_1/\lambda_1 S} = \frac{T_2 - T_3}{e_2/\lambda_2 S}$$

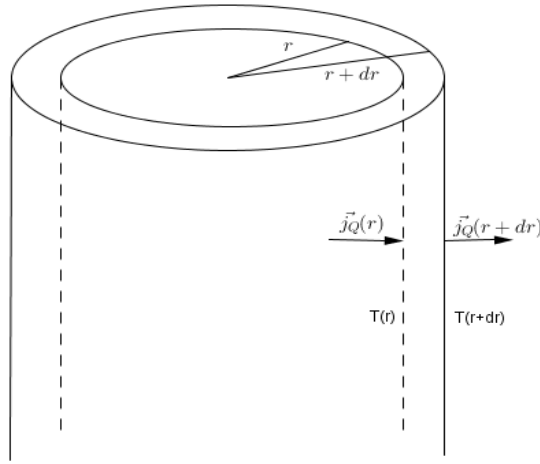
$$\phi \cdot \frac{e_2}{\lambda_2 S} = T_2 - T_3 \Rightarrow T_2 = T_3 + \phi \cdot \frac{e_2}{\lambda_2 S}$$

$$\phi \cdot \frac{e_1}{\lambda_1 S} = T_1 - T_3 - \phi \cdot \frac{e_2}{\lambda_2 S} \Rightarrow \phi \left(\frac{e_1}{\lambda_1 S} + \frac{e_2}{\lambda_2 S} \right) = T_1 - T_3 \Rightarrow \phi = \frac{T_1 - T_3}{\frac{e_1}{\lambda_1 S} + \frac{e_2}{\lambda_2 S}}$$

4.2-Modèle du cylindre creux :

a) Cas d'un seul matériau :

La figure représente un cylindre creux de longueur L , de rayon intérieur R_1 et de rayon extérieur R_2 . On note λ la conductivité thermique constituant ce cylindre, T_1 la température au rayon R_1 , et T_2 la température au rayon R_2 . L'écriture du bilan thermique d'un petit élément volumique du cylindre de longueur L située entre les rayons r et $r + dr$, donc d'épaisseur dr , permet de démontrer la constance du flux thermique.



$$\phi_{(r)} - \phi_{(r+dr)} = 0 \Rightarrow \phi(r) = \text{constante}$$

$$-\lambda 2\pi r L \cdot \frac{dT}{dr} = \phi \Rightarrow \phi dr = -\lambda 2\pi r L dT \Rightarrow \phi \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} = -\lambda 2\pi L \int_{T_1}^{T_2} dT$$

$$\phi \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) = -\lambda 2\pi L (T_2 - T_1) \Rightarrow \phi = \frac{T_1 - T_2}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) / 2\pi\lambda L}$$

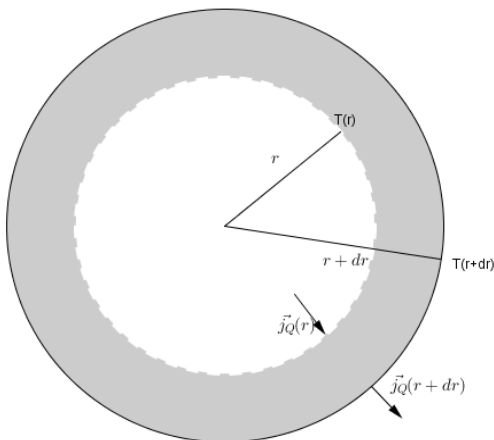
$$\phi \int_{R_1}^r \frac{dr}{r} = -\lambda 2\pi L \int_{T_1}^{T(r)} dT \Rightarrow \phi \ln\left(\frac{r}{R_1}\right) = -\lambda 2\pi L (T(r) - T_1)$$

$$\frac{T_1 - T_2}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) / 2\pi\lambda L} \cdot \ln\left(\frac{r}{R_1}\right) = -2\pi\lambda L (T(r) - T_1) \Rightarrow T(r) = T_1 - \frac{(T_1 - T_2)}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} \cdot \ln\left(\frac{r}{R_1}\right)$$

b) Cas de N matériaux différents :

$$\phi = \frac{T_1 - T_{N+1}}{\sum R_{th}} \text{ avec } R_{th} = \frac{\ln\left(\frac{R_{i+1}}{R_i}\right)}{2\pi\lambda_i L} \text{ donc } \phi = \frac{T_1 - T_{N+1}}{\sum_{i=1}^N \left(\frac{\ln\left(\frac{R_{i+1}}{R_i}\right)}{2\pi\lambda_i L}\right)}$$

4.3-Modele d'une sphere creuse :



a) La figure représente une coupe transversale d'une sphère creuse de rayon intérieure R_1 et extérieure R_2 . On note λ la conductivité thermique du matériau constituant la sphère, T_1 la température au rayon R_1 et T_2 la température au rayon R_2 .

$$\phi(x) - \phi(x+dx) = 0 \Rightarrow d\phi(x) = 0 \Rightarrow \phi(x) = \text{constante.}$$

Ecriture du bilan thermique d'un petit élément volumique de la sphère situé entre r et $r+dr$ permet de démontrer la constance du flux thermique.

D'après la loi de Fourier :

$$\phi = -\lambda 4\pi r^2 \cdot \frac{dT}{dr} \Rightarrow -\lambda 4\pi \int_{T_1}^{T_2} dT = \phi \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r^2} \Rightarrow -\lambda 4\pi (T_2 - T_1) = \phi \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

$$\phi = \frac{T_1 - T_2}{\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) / 4\pi\lambda}$$

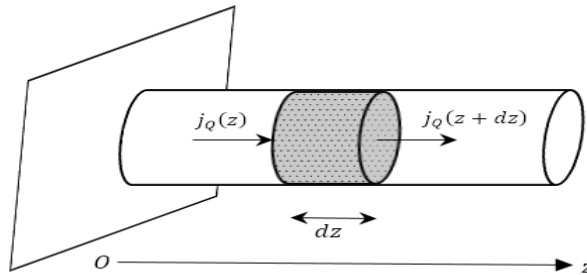
$$T(r) = T_1 - \frac{T_1 - T_2}{\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)} \cdot \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{r}\right)$$

b) Cas de N matériaux :

$$\phi = \frac{T_1 - T_{N+1}}{\sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{R_i} - \frac{1}{R_{i+1}}\right) / 4\pi\lambda}$$

Exercice d'application: Ailette de refroidissement

Nous allons étudier l'évacuation de la chaleur par une ailette de refroidissement. L'ailette est supposée cylindrique de rayon R et de longueur L, elle est soudée à une enceinte de température T_0 et plongée dans l'air.



Etude de la variation de la température à l'extérieur de l'ailette de refroidissement en régime permanent. [$R \ll L$, on néglige alors les variations de température selon r, donc $T(r, z)$ se réduit à $T(z)$]

$$j_Q(z)\pi R^2 dt = j_Q(z+dz)\pi R^2 dt + \rho c \pi R^2 dz dT + h 2\pi R dz [T(z) - T_{air}] dt$$

$$j_Q(z) = j_Q(z+dz) + \rho c dz \cdot \frac{dT}{dt} + 2 \cdot \frac{h}{R} \cdot [T(z) - T_{air}]$$

$$\frac{J_Q(z) - J_Q(z+dz)}{dz} = -\rho c \cdot \frac{dT}{dt} - 2 \cdot \frac{h}{R} \cdot [T(z) - T_{air}]$$

$$\frac{d}{dz}(J_Q) = -\rho c \frac{dT}{dt} - \frac{2h}{R}[T(z) - T_{air}] \quad \text{or } J_Q = -\lambda \frac{dT}{dz}$$

$$-\lambda \frac{d^2 T}{dz^2} = -\rho c \frac{dT}{dt} - \frac{2h}{R}[T(z) - T_{air}]$$

$$\frac{d^2 T}{dz^2} = \frac{\rho c}{\lambda} \frac{dT}{dt} + \frac{2h}{\lambda R}[T(z) - T_{air}]$$

$$\boxed{\frac{d^2 T}{dz^2} - \frac{2h}{\lambda R}[T(z) - T_{air}] = \frac{\rho c}{\lambda} \frac{dT}{dt}}$$

En régime permanent l'équation devient:

$$\boxed{\frac{d^2 T}{dz^2} - \frac{2h}{\lambda R} T(z) = -\frac{2h}{\lambda R} T_{air}} \quad \text{Equation différentielle de second ordre avec second membre.}$$

Solution particulière: T_{air}

$$\text{Pour } \frac{d^2 T}{dz^2} - \frac{2h}{\lambda R} T(z) = 0$$

$$r^2 - \frac{2h}{\lambda R} = 0 \rightarrow r = \pm \sqrt{\frac{2h}{\lambda R}} \rightarrow r = \pm m$$

$$\boxed{T(z) = T_{air} + T_1 e^{mz} + T_2 e^{-mz}}$$

Conditions aux limites:

$$\text{en } z = 0 \quad T = T_0 = T_{air} + T_1 + T_2 \rightarrow \boxed{T_1 + T_2 = T_0 - T_{air}} \quad \{1\}$$

$$\text{en } z = L \quad -\lambda S \frac{dT}{dz} \Big|_{z=L} = hS[T(L) - T_{air}]$$

Au bout de l'ailette, le flux thermique conductif est égale au flux thermique conducto-convectif.

$$-\lambda[mT_1 e^{mL} - mT_2 e^{-mL}] = h[T_1 e^{mL} - T_2 e^{-mL}]$$

$$T_1[-\lambda m e^{mL} - h e^{mL}] = T_2[-\lambda m e^{-mL} + h e^{-mL}]$$

$$\boxed{\frac{T_1}{T_2} = \frac{(\lambda m - h)}{(\lambda m + h)} \cdot \frac{e^{-mL}}{e^{mL}}} \quad \{2\}$$

$$\{1\} \rightarrow T_2 \left[1 + \frac{(\lambda m - h)}{(\lambda m + h)} \frac{e^{-mL}}{e^{mL}} \right] = T_0 - T_{air}$$

$$T_2 \left[\frac{(\lambda m + h)e^{mL} + (\lambda m - h)e^{-mL}}{(\lambda m + h)e^{mL}} \right] = T_0 - T_{air}$$

$$T_2 = (T_0 - T_{air}) \cdot \frac{\lambda(m + h)e^{mL}}{(\lambda m + h)e^{mL} + (\lambda m - h)e^{-mL}}$$

$$T_1 = (T_0 - T_{air}) \cdot \frac{\lambda(m - h)e^{-mL}}{(\lambda m + h)e^{mL} + (\lambda m - h)e^{-mL}}$$

$$T(z) = T_{air} + (T_0 + T_{air}) \frac{(\lambda m + h)e^{m(L-z)} + (\lambda m - h)e^{-m(L-z)}}{(\lambda m + h)e^{mL} + (\lambda m - h)e^{-mL}}$$

Chapitre 3 : Rayonnement

1 - Rayonnement thermique :

Tout corps chauffé émet par sa surface extérieure un rayonnement électromagnétique, dont la puissance est fonction de la température de ce même corps.

Dans un milieu absorbant, les photons incidents sont capturés par les atomes de la couche superficielle du matériau, les électrons de cet atome sont alors excités et passent à un niveau plus élevé d'énergie et se dés excitent ensuite en émettant des photons dont la distribution en énergie ou fréquence dépend de la température du matériau.

Un rayonnement thermique peut se propager dans le vide, contrairement aux transferts thermiques conductifs ou convectifs qui nécessitent un support matériel. L'analyse spectrale du rayonnement thermique indique une majorité de courtes longueurs d'ondes (grandes fréquences) aux très hautes températures, et une majorité de grandes longueurs d'ondes (basses fréquences) aux températures plus basses.

2 - Flux radiatif d'un corps opaque :

2-1- Flux réfléchi; flux absorbe; flux transmis :

Lorsqu'un matériau reçoit un rayonnement thermique :

- Une fraction ρ du flux incident $\phi_{incident}$ est **réfléchi**.
- Une fraction α du flux incident $\phi_{incident}$ est **absorbée**.
- Une fraction ζ du flux incident $\phi_{incident}$ est **transmise**.

Les trois coefficients dépendent du domaine de longueur d'onde choisi, et sont liés par la relation :

$$\rho + \alpha + \zeta = 1$$

2-2- Corps transparents ; corps opaques :

Un corps est dit **transparent**, si tout le flux incident est transmis dans le domaine de longueur d'onde considéré.

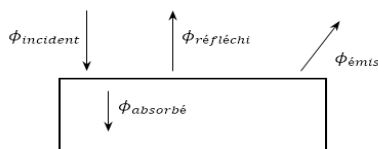
$$\zeta = \frac{\phi_{transmis}}{\phi_{incident}} = 1$$

Un corps est dit **opaque**, s'il ne transmet aucune fraction du flux incident dans le domaine de longueur d'onde considéré.

$$\zeta = \frac{\phi_{transmis}}{\phi_{incident}} = 0$$

2-3- Flux radiatif d'un corps opaque :

Soit un corps opaque au rayonnement qui reçoit un rayonnement thermique $\phi_{incident}$.



On appelle flux radiatif d'un corps opaque, le bilan des flux partants et arrivants.

$$\begin{aligned} \phi_{incident} &= \phi_{partant} - \phi_{arrivant} \\ &= (\phi_{réfléchi} + \phi_{émis}) - \phi_{incident} \end{aligned}$$

$$= (\phi_{réfléchi} + \phi_{émis}) - (\phi_{réfléchi} + \phi_{absorbé})$$

$$\phi_{radiatif} = \phi_{émis} - \phi_{absorbé}$$

Remarque : Un corps opaque est en équilibre radiatif avec l rayonnement si son flux radiatif est égal à 0. ($\phi_{émis} = \phi_{absorbé}$)

3 - Corps noirs – Exitance – Loi de Stefan :

3-1- Définition :

Un corps noir est défini comme un absorbeur intégral sur la totalité du spectre, donc tout rayonnement thermique incident est absorbé quel que soit la longueur d'onde, ou bien sa direction incidente.

$$\alpha = \frac{\phi_{absorbé}}{\phi_{incident}} = 1$$

Compte tenu qu'un pareil corps pourrait émettre de la lumière sous l'effet d'augmentation de la température, il n'est pas correct d'affirmer qu'un corps noir paraît noir dans toutes les conditions.

3-2- Réalisation d'un corps noir :

L'idée classique retenue est de considérer une enceinte vide strictement isotherme (T parfaitement contrôlée). Cette enceinte est percée d'un trou ou d'un orifice de petite dimension. Les parois extérieures de l'enceinte sont faites d'un matériau réfractaire (donc sont parfaitement adiabatiques). Le rayonnement émis par les parois de l'enceinte est réabsorbé par les mêmes parois. Seule une très faible fraction de rayonnement peut sortir par l'orifice, ainsi tout rayonnement extérieur pénétrant par la cavité, ne peut pratiquement pas sortir et est ainsi piégé dans l'enceinte. Il y a donc dans cette condition, une absorption pratiquement complète du rayonnement thermique.

La perturbation apportée sur le rayonnement d'équilibre par le rayonnement qui s'échappe et le rayonnement qui pénètre dans l'enceinte à travers l'orifice est négligeable. Par suite l'orifice peut être vu de l'extérieur comme un corps noir.

3-3- Exitance d'une source de rayonnement :

Une source de rayonnement est caractérisée par son exitance notée « M » défini comme la puissance totale émise par unité de surface de la source.

$$M = \frac{dP_{émise}}{dS_{source}} \quad (W \cdot m^{-2})$$

3-4 - Loi de Stefan-Boltzmann :

Un corps noir à la température T émet un rayonnement thermique dont l'exitance M est proportionnel à la puissance 4^{ème} de la température.

$$M = \sigma T^4 \quad \sigma = \text{constante de Stefan} = 5,7 \times 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$$

L'exitance d'un corps noir est indépendante de la nature du corps, elle dépend uniquement de sa température.

3-5- Equilibre radiatif d'un corps noir :

D'après la loi de Stefan, la relation d'équilibre radiatif s'écrit pour un corps noir de surface S et de température T :

$$\phi_{absorbé} = \phi_{émis} = \sigma T^4 S f$$

4- Corps gris – Emissivité :

a) Corps gris : C'est un corps qui absorbe partiellement l'énergie incidente qu'il reçoit. $0 < \alpha < 1$

b) Emissivité (ϵ) : $M = \epsilon \times \sigma \times T^4$ avec $\epsilon < 1$

Remarque : La relation d'équilibre radiatif exprime un résultat plus général : Plus le corps absorbe, plus le corps émet du rayonnement. Ainsi un corps noir qui est défini comme un absorbeur parfait est celui dont l'émission du rayonnement thermique est maximale, donc c'est un émetteur parfait.

5- Exitance et énergie volumiques spectrales :

5-1-Exitance spectrale :

Dans un intervalle spectrale $d\lambda$ (limitée entre les longueurs d'ondes λ et $\lambda + d\lambda$) l'exitance d'un corps noir $dM = M_\lambda d\lambda$ où

$$M_\lambda(\lambda, T) = \frac{dM}{d\lambda} \quad \Rightarrow \quad M = \int_0^\infty M_\lambda(\lambda, T) d\lambda$$

5-2- Energie volumique spectrale :

Dans l'intervalle spectrale $d\lambda$ une enceinte trouée réalisant ainsi un corps noir possède une énergie volumique notée

$$dU = U_\lambda d\lambda \quad (\text{où } U_\lambda(\lambda, T) = \frac{dU}{d\lambda}) \quad \Rightarrow \quad U_\lambda = \int_0^\infty U_\lambda(\lambda, T) d\lambda$$

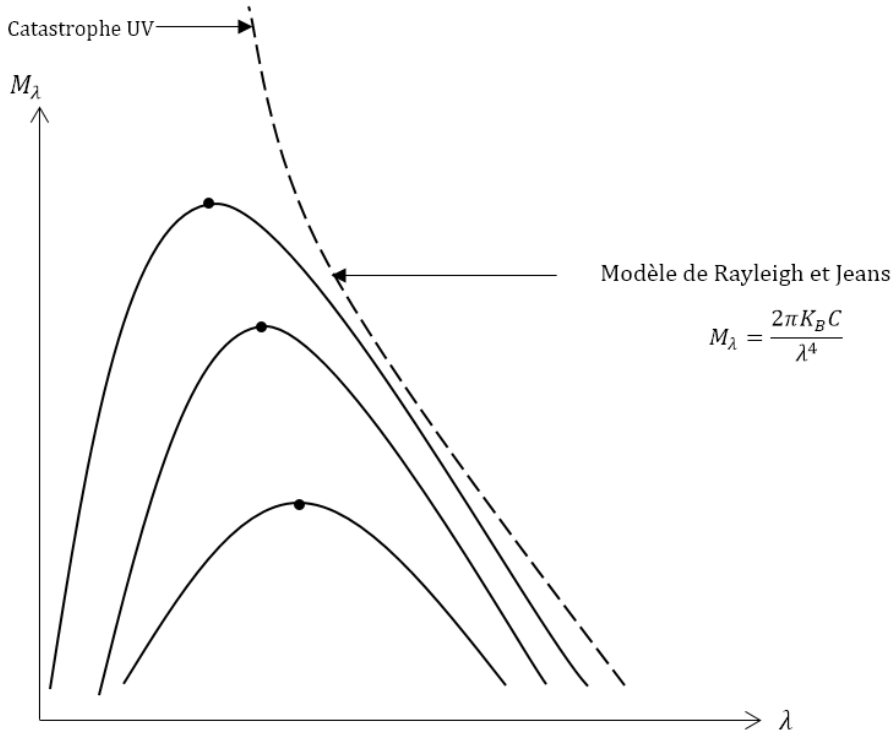
Remarque : Il existe une relation entre M et U,

$$M = \frac{c}{4} U \quad ; \quad M_\lambda(\lambda, T) = \frac{c}{4} U_\lambda(\lambda, T)$$

6- Loi de Wien – Loi de Planck :

6-1- Isothermes d'un corps noir :

Un isotherme (T=constante) traduit la répartition énergétique spectrale M_λ à la température T d'un corps noir.



On constate expérimentalement que lorsque la température du corps noir est élevée, le pique de la courbe se déplace vers les courtes longueurs d'ondes et inversement vers les basses températures. La courbe pointillée indique la prédiction de la théorie classique (modèle de Rayleigh – Jeans) par opposition à la théorie quantique qui seule prédit la forme correcte des courbes effectivement observées.

6-2- Loi de déplacement de Wien :

L'exittance spectrale d'un corps noir est maximale pour une longueur d'onde λ_m inversement proportionnelle à sa température absolue. Donc d'après Wien : $\lambda_m T = \lambda'_m T' = constante = 2900 \mu m. K$ (qui est une loi expérimentale)

6-3- Loi de Planck :

Par une étude quantique, Planck a établi les expressions de $U_\lambda(\lambda, T)$ et $M_\lambda(\lambda, T)$, c'est-à-dire de l'énergie volumique spectrale et de l'exittance spectrale.

$$U_\lambda(\lambda, T) = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{\exp\left(\frac{hc}{K_B \lambda T}\right) - 1}$$

avec $h = 6.626 \times 10^{-34} J.S$ (constant de Planck)

$K_B = 1.38 \times 10^{-23} J. K^{-1}$ constante de Boltzmann

$$M_\lambda(\lambda, T) = \frac{c}{4} \cdot U_\lambda = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{\exp\left(\frac{hc}{K_B \lambda T}\right) - 1}$$

6-4 - Loi de Wien :

$$\left(\frac{dM_\lambda}{d\lambda}\right)_{\lambda=\lambda_m} = 0 \quad \text{On pose } x = \frac{hc}{K_B\lambda T}$$

$$\lambda^5 = \left(\frac{hc}{K_B T}\right)^5 \cdot x^5 \Rightarrow \frac{1}{\lambda^5} = \left(\frac{K_B T}{hc}\right)^5 \cdot x^5$$

$$M(x, T) = 2\pi hc^3 \cdot \left(\frac{K_B T}{hc}\right)^5 \cdot x^5 \cdot \frac{1}{e^x - 1} = A \cdot \frac{x^5}{e^x - 1}$$

$$\frac{dM_x}{dx} = A \cdot \frac{5x^4(e^x - 1) - x^5 e^x}{(e^x - 1)^2} = 0 \Rightarrow 5x^4(e^x - 1) - x^5 e^x = 0 \Rightarrow 5x^4 e^x - 5x^4 - x^5 e^x = 0 \Rightarrow 5e^x - 5 - x e^x = 0$$

$$\Rightarrow 1 - e^{-x} - 0.2x = 0 \Rightarrow \boxed{e^{-x} + 0.2x - 1 = 0}$$

C'est une équation transcendante à résoudre numériquement, on obtient $x = 4.9651$

$$4,9651 = \frac{hc}{K_B \lambda_m T} \Rightarrow \lambda_m T = \frac{hc}{4,9651 K_B} \Rightarrow \boxed{\lambda_m T = 2900 \mu\text{m} \cdot K}$$

On retrouve la loi expérimentale de Wien.

6-5 - Loi de Stefan :

$$M = \int_0^\infty M_\lambda d\lambda = \int_0^\infty \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{\exp\left(\frac{hc}{K_B \lambda T}\right) - 1} \cdot d\lambda \quad \text{on pose : } x = \frac{hc}{K_B \lambda T} \Rightarrow \lambda = \frac{hc}{K_B T} \cdot 1/x$$

$$d\lambda = \frac{-hc}{K_B T} \cdot \frac{1}{x^2} \cdot dx \Rightarrow \frac{1}{\lambda^5} = \left(\frac{K_B T}{hc}\right)^5 \cdot x^5$$

$$M = 2\pi hc^2 \left(\frac{-hc}{K_B T}\right) \left(\frac{K_B T}{hc}\right)^5 \cdot \int_\infty^0 \frac{x^3}{e^x - 1} \cdot dx \quad M = 2\pi hc^2 \left(\frac{hc}{K_B T}\right) \left(\frac{K_B T}{hc}\right)^5 \cdot \frac{\pi^4}{15}$$

$$\boxed{M = 2\pi hc^2 \left(\frac{hc}{K_B}\right) \left(\frac{K_B}{hc}\right)^5 \cdot \frac{\pi^4}{15} \cdot T^4}$$

$$\boxed{\sigma = 2\pi hc^2 \left(\frac{hc}{K_B}\right) \left(\frac{K_B}{hc}\right)^5 \cdot \frac{\pi^4}{15} = 5.7 \times 10^{-8}}$$