Session – Enoncé

Partiel Algèbre linéaire

SPE

Semestre 1

Université Saint-Joseph
Faculté d'ingénierie-ESIB
Département des Classes Préparatoires *novembre 2015*
Mathématiques Spéciales

Composition: Algèbre linéaire
Durée: 1h30- Documents interdits- Calculatrice interdite- Nb de pages: 2

Exercice 1

On considère la matrice $A \in M_3(\mathbb{R})$ donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que $sp(A) = \{1, 2, 3\}$.
2. Déterminer une matrice D diagonale et une matrice P inversible tel que $A = PDP^{-1}$.

Exercice 2

On considère l'espace vectoriel des polynômes réels $E = \mathbb{R}_2[X]$. On définit trois fonctions f_0, f_1, f_2 de E vers $\mathbb{R}$ par $f_i(P) = P(i)$ pour tout P dans E.

1. Montrer que les f_i sont des applications linéaires.
2. Montrer que $\{f_0; f_1; f_2\}$ est une base de E.
3. Trouver la base préduale $\{e_0; e_1; e_2\}$ de $\{f_0; f_1; f_2\}$.

Exercice 3

Soit E un espace vectoriel sur un corps $\mathcal{K}$, et ψ un endomorphisme de E. On suppose ψ nilpotent, c'est-à-dire qu'il existe un entier strictement positif n tel que $\psi^n = 0$. Déterminer les valeurs propres de ψ et les sous-espaces propres associés.

Tourner SVP

Exercice 4

Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{R}$. Soit u un endomorphisme de E tel que $u^3 = Id$.

1. Montrer que $Im\ (u - Id) \subset Ker(u^2 + u + Id)$.
2. En déduire que $E = Im\ (u - Id) \oplus Ker\ (u - Id)$.
3. Soit x un vecteur non nul de $Im\ (u - Id)$.

   a) Montrer que $u(x)$ appartient à $Im(u - Id)$.

   b) En raisonnant par l'absurde, montrer que x et $u(x)$ sont libres.

Question Bonus

Montrer qu'une forme linéaire non nulle sur un espace vectoriel E est surjective.

BON TRAVAIL!