Résumé

Algèbre

SPE

redigé par:Tania Azzi

Chapitre 2 : Espace préhilbertiens :

E est $\mathbb{R}$-ev

Produit scalaire

1. ϕ est dite bilinéaire si elle est linéaire à gauche et à droite : $\forall x, y, z \in E$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$$\phi(\lambda x + \mu y, z) = \lambda \phi(x, z) + \mu \phi(y, z)$$
$$\phi(x, \lambda y + \mu z) = \lambda \phi(x, y) + \mu (x, z).$$

2. ϕ est dite symétrique si $\forall x, y \in E$, $\phi(x, y) = \phi(y, x)$
3. ϕ est dite défini si $\forall x \in E$, $\phi(x, x) = 0 \Rightarrow x = 0$
4. ϕ est dite positive si $\forall x \in E$, $\phi(x, x) \geq 0$.

- produit scalaire sur E : c'est toute forme bilinéaire symétrique défini et positif

- ϕ produit scalaire ssi ϕ symétrique linéaire à gauche défini positif

- espace préhilbertien réel c'est tout couple (E, ϕ) ou E est $\mathbb{R}$-ev et ϕ un Produit scalaire (ps) sur E
- Le ps est noté $\langle x, y \rangle$, $x \cdot y$, $\phi(x, y)$

Le PS canonique est $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ sur $\mathbb{R}^n$
$x = (x_1 \ldots x_n)$ et $y = (y_1 \ldots y_n)$
$(\mathbb{R}^n, \langle x, y \rangle)$ est un espace préhilbertien.

Inégalité de Cauchy-Schwarz : $(E, \langle \, , \rangle)$ espace préhilbertien

$\forall x, y \in E$, $(\langle x, y \rangle^2) \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle$

on a égalité ssi (x, y) est lié.

Ds $\mathbb{R}^n$: $\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)$

Inégalité de Minkowski :

$\forall x, y \in E$: $\sqrt{\langle x+y \rangle \langle x+y \rangle} \leq \sqrt{\langle x, x \rangle} + \sqrt{\langle y + y \rangle}$

on a égalité ssi (x, y) est " positivement " liée.

- $B = (a_i)_{i=1..n}$ une base de E (E un $\mathbb{R}$ - ev de dim $n > 0$).

si $A = (\phi(a_i, a_j))_{i,j=1...n}$ et ϕ base bilinéaire

$X = Mat_B\, x$ et $Y = Mat_B\, Y$

pour $x, y \in E$ on a $\phi(x, y) = {}^tX A Y = {}^tY {}^tA X$

A est la matrice de la forme bilinéaire ϕ de la base B et notée $Mat_B\, \phi$

ex : $\phi(x, y) = x_1 y_1 - 2 x_2 y_2$ $x = (x_1, x_2)$ $y = (y_1, y_2)$

$Mat_B\, \phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.

- ϕ est symétrique ssi A est symétrique.
- B, B' 2 bases de E et P la matrice de passage de B à B'

$A = Mat_B\, \phi$ et $A' = Mat_{B'}\, \phi \Rightarrow A' = {}^tP A P$.

Norme associé à un ps : $(E, \langle .., .. \rangle)$ espace préhilbertien

application $\| \; \| : E \to \mathbb{R}$

$x \to \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ est une norme sur E associé au produit scalaire

un vecteur est dit unitaire si sa norme vaut 1.

on obtient :
- $\forall x \in E$ $\|x\| \geq 0$
- $\forall x \in E, \lambda \in \mathbb{R}$, $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$
- $\forall x \in E$, $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0_E$
- Inégalité de Cauchy-Schwartz $|\langle x, y \rangle| \leq \sqrt{\|x\| \|y\|}$
- Inégalité de Minkowski : $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

pour tous $x, y \in E$.

Identités de polarisation :

- $\langle x, y \rangle = \frac{1}{2} \left(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2 \right)$
- $\langle x, y \rangle = \frac{1}{2} \left(\|x\|^2 + \|y\|^2 - \|x-y\|^2 \right)$
- $\langle x, y \rangle = \frac{1}{4} \left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 \right)$.

Identité du parallélogramme :

$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2 \left(\|x\|^2 + \|y\|^2 \right)$.

Orthogonalité : E désigne un espace préhilbertien réel.

- x et $y \in E$ sont dit orthogonaux si $\langle x, y \rangle = 0$ $(x \perp y)$
- 2 sev E_1 et E_2 sont dits orthogonaux si $\forall (x, y) \in E_1 \times E_2$ $\langle x, y \rangle = 0$ $(E_1 \perp E_2)$.

* $\forall x, y \in E$, $x \perp y \Leftrightarrow y \perp x$
* le vecteur nul est le seul vecteur orthogonal à tout autre, ie $\forall x \in E$ $x \perp 0$.
* Le vecteur nul est le seul vecteur orthogonal à lui même.

Pythagore : $\langle x, y \rangle = 0 \Leftrightarrow \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

- une famille $(x_i)_{\in I}$ de vecteurs de E est dite orthogonale si : $\forall i, j \in I$, $i \neq j \Rightarrow \langle x_i, x_j \rangle = 0$.
- une famille $(x_i)_{i \in I}$ est dite orthonormale si de plus, les vecteurs sont unitaires ie $\forall i, j \in I$,

$$\langle x_i, x_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$$

Généralisation du théorème de pythagore :

$(x_i)_{i \in I}$ une famille orthogonale de vecteurs alors :

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} x_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2$$

- tout famille orthogonale de vecteurs de E ne comportant pas le vecteur nul est libre en particulier la famille orthonormale

Espace euclidiens :

- c'est tout espace préhilbertien réel de dimension fini.
- une base orthonormal d'un espace euclidien E c'est toute famille de vecteurs de E qui est à la fois une base et une famille orthononormal
- Si E un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ alors toute famille orthonormale de vecteurs de E forme une base orthonormale de E.
- tout espace euclidien possède une base orthonormale.

- Procédé d'orthonormalisation de Schmidt.

$(x_1, \dots, x_n)$ est une famille libre de vecteurs de E, alors il existe une unique famille orthonormale $(e_1 \dots e_n)$ vérifiant :

- $\forall k \in [1, n]$, $Vect(x_1, \dots x_k) = Vect(e_1 \dots, e_k)$
- $\forall k \in [1, n]$, $\langle x_k, e_k \rangle > 0$.

$(e_1 \dots e_n)$ est la famille orthonormalisé de $(x_1, \dots x_n)$ par le procédé de Schmidt elle est donnée par :

$$e_{k+1} = \frac{u}{\|u\|} \quad \text{où} \quad u = x_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \langle e_i, x_{k+1} \rangle e_i.$$

Les étapes à suivre :

- Étape 1 : On pose $e_1 = \frac{x_1}{\|x_1\|}$
- Étape 2 : On pose $u = x_2 + \alpha e_1$ et on détermine α pour avoir $\langle e_1, u \rangle = 0$ et on pose $e_2 = \frac{u}{\|u\|}$
- Étape 3 : On pose $u = x_3 + \alpha e_1 + \beta e_2$ et on détermine α et β de sorte que $\langle e_1, u \rangle = 0$ et $\langle a_2, u \rangle = 0$
  Puis on pose $e_3 = \frac{u}{\|u\|}$ et ainsi de suite.

En pratique, il suffit de construire une famille orthogonale $(x_1 \dots x_n)$ et à la fin, on pose $e_i = \frac{f_i}{\|f_i\|}$

exemple : Ds $\mathbb{R}^3$, muni de son ps, on considère la famille (x_1, x_2, x_3) avec $x_1 = (0, 1, 1)$; $x_2 = (1, 0, 1)$ et $x_3 = (1, 1 ; 0)$

(x_1, x_2, x_3) est libre car $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$

On pose $f_1 = x_1$

On pose $f_2 = x_2 + \alpha f_1$ avec $\langle f_1, f_2 \rangle = 0$

or $\langle f_1, f_2 \rangle = \langle f_1, x_2 + \alpha f_1 \rangle = \langle f_1, x_2 \rangle + \alpha \langle f_1, f_1 \rangle$

donc $\alpha = -\frac{\langle f_1, x_2 \rangle}{\langle f_1, f_1 \rangle} = -\frac{1}{2}$

donc $f_2 = x_2 - \frac{1}{2} f_1 = (1, 0, 1) - (0, \frac{1}{2} ; \frac{1}{2}) = (1, -\frac{1}{2} ; \frac{1}{2})$

On pose $f_3 = x_3 + \alpha f_1 + \beta f_2$ avec $\langle f_1, f_3 \rangle = \langle f_2, f_3 \rangle = 0$.

or $\langle f_1, f_3 \rangle = \langle x_3 + \alpha f_1 + \beta f_2, f_1 \rangle = \langle x_3, f_1 \rangle + \alpha \langle f_1, f_1 \rangle$

donc $\alpha = -\frac{\langle x_3, f_1 \rangle}{\langle f_1, f_1 \rangle} = -\frac{1}{2}$

$\langle f_2, f_3 \rangle = \langle f_2, x_3 + \alpha f_1 + \beta f_2 \rangle = \langle f_2, x_3 \rangle + \beta \langle f_2, f_2 \rangle$

donc $\beta = -\frac{\langle f_2, x_3 \rangle}{\langle f_2, f_2 \rangle} = -\frac{1}{3}$

donc $f_3 = x_3 - \frac{1}{2} f_1 - \frac{1}{3} f_2$

$= (1, 1, 0) - \frac{1}{2}(0, 1, 1) - \frac{1}{3}(1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

$= (\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3})$

Donc (f_1, f_2, f_3) est une famille orthogonale

On pose $e_1 = \frac{f_1}{\|f_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 1)$

$e_2 = \frac{f_2}{\|f_2\|} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}}}(1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \sqrt{\frac{2}{3}}(1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

$e_3 = \frac{f_3}{\|f_3\|} = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})$

- si $(e_1, \ldots e_n)$ est une base orthonormale, alors les matrices de passages de $(e_1 \ldots, e_n)$ à $(x_1, \ldots x_n)$ et de $(x_1, \ldots x_n)$ à $(e_1 \ldots e_n)$ sont triangulaires supérieures.

Coordonnées de une base orthonormale

$B = (e_1 \ldots, e_n)$ une base orthonormale de E. Alors les coordonnées $x_1, \ldots x_n$ d'un vecteur x dans la base B sont données par $x_k = \langle x, e_k \rangle$ $\forall k = 1, \ldots, n$

Autrement dit, $\forall x \in E$, $x = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k$.

$B = (e_1 \ldots, e_n)$ base orthonormale alors $\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$

en particulier $\|x\| = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)^{\frac{1}{2}}$

Orthogonal d'une partie.

E un espace préhilbertien réel et A une partie de E l'orthogonaux de A l'ensemble noté $A^\perp$ des vecteurs orthogonaux à tous les vecteurs de A.

ie: $A^\perp = \{x \in E, \forall y \in A, \langle x, y \rangle = 0\}$.

- E un espace préhilbertien réel et F un sev de E alors $F^\perp$ est un sev de E.
- A et B deux parties de E : $A \subset (A^\perp)^\perp$. $A \subset B \Rightarrow B^\perp \subset A^\perp$

$F \cap F^\perp = \{0_E\}$ donc F et $F^\perp$ sont en somme directe

i,e $\forall x \in F, \forall y \in F^\perp, x + y = 0 \Rightarrow x = y = 0$.

Supplémentaire orthogonal d'un sev de dimension finie

- E un espace préhilbertien réel et F un sev de E de dimension finie

Alors les sev F et $F^\perp$ sont supplémentaires de E : $E = F \oplus F^\perp$

- E est un espace euclidien alors tout sev admet un supplémentaire orthogonal et on a a: $\dim E = \dim F + \dim F^\perp$.

- Ds un espace euclidien, toute famille orthonormale peut être complétée en une base orthonormale

Projection orthogonale sur un sev de dimension finie.

F désigne un sev de dimension finie d'un espace pH réel E.

- La projection orthogonale c'est la projection p_F sur F // à $F^\perp$, ie : si $x = y + z$ avec $y \in F$, $z \in F^\perp$ alors $p_F(x) = y$.
- $\forall x \in E$, $p_F(x)$ est le seul vecteur y de F tq $x - y \in F^\perp$.
- Si $y \in F$ alors $p_F(y) = y$.

Inégalité de Bessel : $\forall x \in E$, $\|p_F(x)\| \leq \|x\|$

Expression du projeté orthogonal : $(e_1 \ldots e_n)$ une base orthonormale de F alors $\forall x \in E$, $p_F(x) = \sum_{k=1}^{m} \langle x, e_k \rangle e_k$

- La projection orthogonale p_F est idempotente ($p_F \circ p_F = p_F$) d'image F et de noyau $F^\perp$

Distance à un sev :

- F un sev de E et $x \in E$ $(y \in F)$: $d(x, F) = \inf \|x - y\|$.
- F un sev de dimension finie et $x \in E$ alors $\|x - p_F(x)\| \leq \|x - y\|$ $\forall y \in F$.
- F un sev de dimension fini de E et $x \in E$ alors, $p_F(x)$ est l'unique vecteur de F tq $d(x, F) = \|x - p_F(x)\|$.

Formes linéaires sur un espace euclidien :

ϕ une forme linéaire sur un espace euclidien E alors il existe un unique vecteur $a \in E$ tq $\forall x \in E$, $\phi(x) = \langle a, x \rangle$

En dimension finie, toute forme linéaire est représentée par un produit scalaire.