Résumé

Algèbre

SPE

redigé par:Tania Azzi

$u \in O(E)$

Chapitre 3 : Endomorphismes des espaces euclidiens

L'isométrie vectorielle de E est tout endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ ssi elle conserve :
- la norme $\forall x \in E$, $\|u(x)\| = \|x\|$
- le produit scalaire $\langle u(x), u(y) \rangle = \langle x, y \rangle$
- l'image par u d'une base orthonormale est une base orthonormale

⚠ L'isométrie conserve aussi les distances

- $GL(E)$ est l'ensemble des isomorphismes de E
- L'ensemble $O(E)$ des endomorphismes orthogonaux (isométrie vectoriel) de E est un sous groupe de $(GL(E), \circ)$ appelé groupe orthogonal de E.

- Si u admet des valeurs propres alors elles appartiennent à $\{-1, 1\}$
- F un sev de E stable par u Alors $F^\perp$ est stable par u.

Matrices orthogonales.

$M \in M_n(\mathbb{R})$ est une matrice orthogonale si l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ qui lui est associé (muni de sa structure canonique) est orthogonal.

Les assertions suivantes sont équivalentes

(1) M est orthogonale

(2) ${}^tMM = I_n$

(3) : $M\,{}^tM = I_n$

(4) : M est inversible et $M^{-1} = {}^tM$

(5) : Les vecteurs lignes de M forment une base orthonormale de $M_{1,n}(\mathbb{R})$

(6) : Les vecteurs colonnes de M forment une base orthonormale de $M_{n,1}(\mathbb{R})$

L'inverse d'une matrice orthogonale est orthogonale.

- B une base orthonormale de E et B' une autre base de E
B' est orthonormale ssi la matrice de passage de B à B' est une matrice orthogonale. $P_{BB'}$.

La formule de changement de Base s'écrit $A' = {}^tPAP$
($A = Mat_B(u)$ et $A' = Mat_{B'}(u)$)
A et A' sont orthogonalement semblables.

- L'ensemble $O_n(\mathbb{R})$ des matrices orthogonales de dimension n est un sous groupe de $(Gl_n(\mathbb{R}))$ appelé sous-groupe orthogonal d'ordre n.

- $M \in O_n(\mathbb{R})$ alors $\det M = \pm 1$.

Endomorphismes symétriques. $u \in \mathcal{L}(E)$;

E un espace euclidien de dimension n.

- Un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ est dit symétrique si :
$\forall x, y \in E, \langle f(x), y \rangle = \langle x, f(y) \rangle$
$S(E)$ est l'ensemble des endomorphismes symétrique de E
- Une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ est dite symétrique si ${}^tA = A$
cad $\forall i,j \in \{1, \ldots, n\}$ $a_{ij} = a_{ji}$.
$S_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de $M_n(\mathbb{R})$
- u est symétrique ssi $Mat_B u$ est symétrique

- $u \in S(E)$ et F un sev stable par u ; Alors $F^\perp$ est stable par u
- $u \in S(E)$; les sous espaces propres de u sont 2 à 2 orthogonaux.

$u \in S(E)$ est diagonalisable.
- $\exists$ une base orthonormée de E formée de vecteurs propre de u

- E est une somme directe orthogonale des sep.

- M une matrice symétrique réelle, toutes ses vps ds $\mathbb{R}$ et M est diagonalisable ds $M_n(\mathbb{R})$. De plus, il existe $D \in D_n(\mathbb{R})$ il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$; $M = {}^tPDP$

- Pour diagonaliser une matrice symétrique réelle :
1) On détermine une base de chaque sep.
2) On orthonormalise chacune de ces bases, puis on les concatène pour obtenir une base orthonormale de E.

Espaces euclidiens orientés :

- 2 bases B et B' définissent la même orientation si $\det P_{BB'} > 0$.
- Orienté un espace euclidien c'est bien choisi une bon ordonnée fixée
- B' une base orienté par B. On dit que B' est directe si elle définie la même orientation que B et indirecte sinon.

- (u, v) famille de vecteur de E (espace euclidien)
(e_1, e_2, e_3) une bon directe de E si $u = (x, y, z)$ et $v = (x', y', z')$ alors
$u \wedge v = (yz' - y'z)(e_1) + (x'z - xz')e_2 + (xy' - x'y)e_3$.

- $u \wedge v = 0_E$ ssi (u, v) liée
- (u, v) est libre alors $u \wedge v \in (\text{vect}(u, v))^\perp$ et $(u, v, u \wedge v)$ forme une base directe

- une droite D de l'espace E_3 est orientée par le choix d'un vecteur directeur non nulle.
- 2 vecteurs u_1 et u_2 de D définissent la m orientation si $\langle u_1, u_2 \rangle > 0$.
- Un plan de l'espace E_3 est orienté par le choix d'une base (u, v) de P

- 2 bases (u_1, v_1) et (u_2, v_2) d'un plan définissent la m̂ orientation si $[u_1 \wedge v_1, u_2 \wedge v_2] > 0$.

- $SO_n(\mathbb{R})$ c'est l'ensemble des matrices orthogonales de déterminant 1
- On l'appelle groupe spécial orthogonal.
- $SO(E)$ l'ensemble des endomorphismes orthogonaux u tq $\det u = 1$: c'est le groupe des isométries directes.

Isométries vectorielles, plan euclidien

E espace euclidien orienté de dim 2.
2 types de matrices orthogonales carrées

- $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ $\quad S(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$

$\det(R(\theta)) = 1$ $\quad \det(S(\theta)) = -1$.

- $SO_2(\mathbb{R})$ est un groupe commutatif et on a $\forall \theta, \theta' \in \mathbb{R}$ $\quad R(\theta).R(\theta') = R(\theta+\theta')$
- $O_2(\mathbb{R}) \setminus SO_2(\mathbb{R})$ n'est pas groupe et le produit n'y est pas commutatif et on a $\forall \theta, \theta' \in \mathbb{R}$, $S(\theta).S(\theta') = R(\theta-\theta')$

- on n'a que 2 types de matrices orthogonales alors il n'y a que 2 types d'isométries vectorielles
  - rotations vectorielles planes
  - reflexions $(O(E) \setminus SO(E))$

- $u \in SO(E)$
La matrice de u est la m̂ ds toute les bon directe de E
$(\exists! \, \theta(2\pi))$

Pour déterminer θ, on considère un vecteur unitaire $x \in E$ et une bon directe B et on utilise les formules $\cos\theta = \frac{1}{2} \operatorname{tr} u$
$\sin\theta = \det_B(x, f(x))$

- $u, v \in SO(E)$ sont 2 rotations d'angles θ et θ' respectivement alors $u \circ v$ est une rotation d'angle $\theta + \theta'$.

- $u \in O(E) \setminus SO(E)$
Alors u est la reflexion d'axe $E_1(u)$ le sep associé à la vp 1
D'où $E_1(u)$ est égal en d'autre terme à $\ker(u - Id_E)$.

- $u \in O(E)$.
* $\dim(\ker u - id_E)) = 0 \Rightarrow u$ rotation vectorielle
* $\dim(\ker(u - id_E)) = 1 \Rightarrow u$ est une reflexion d'axe $E_1(u)$
* $\dim(\ker(u - id_E)) = 2 \Rightarrow u = Id_E$

- $f \in SO(E)$ alors $\exists$ une base orthonormée directe (u, v, w) ds laquelle la matrice de f est de la forme $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

f est la rotation d'axe dirigé et orienté par u et d'angle θ : $rot_{u,\theta}$

- $\forall \theta, \theta'$, $rot_{u,\theta} \circ rot_{u,\theta'} = rot_{u,\theta+\theta'}$
- $rot_{u,\theta}^{-1} = rot_{u,-\theta}$
- pour déterminer l'angle et l'axe de la rotation on cherche un vecteur $u \neq 0$ tq $f(u) = u$ et $\cos\theta = \dfrac{tr(f) - 1}{2}$

et le signe de $\sin\theta$ est donné par le signe de $\det(u, x, f(x))$ où x est un vecteur non colinéaire à u

- $f \in O(E)$
$\dim(\ker f - Id_E)) = 0 \Rightarrow f = -id_E$ ou f est antirotation (composée commutative d'une rotation et d'une reflexion)
- $\dim(\ker(f - id_E)) = 1 \Rightarrow f$ est une rotation
- $\dim(\ker(f - id_E)) = 2 \Rightarrow f$ est une reflexion
- $\dim(\ker(f - id_E)) = 3 \Rightarrow f = id_E$