Chapitre 1: Notions de logique et vocabulaire ensembliste.

1-Notions logiques.

-Assertions et proposition.
-Deux assertions équivalentes : même valeur de vérité.
-Prédicat : $P(x)$
-Axiome : Vrai sans démonstration.
-Lemme → Théorème → Corolaire.

Operations :

-P: assertion / $\bar{P} = \urcorner P$: négation / $P \cup Q$: disjonction (Au moins 1 Vrai) / $P \cap Q$: conjonction (Les 2 sont Vrai)
-$P \to Q = \urcorner P \cup Q$ ($Faux \to Faux$ ($Vrai$) / $Faux \to Vrai$ ($Vrai$) / $Vrai \to Vrai$ ($Vrai$) / $Vrai \to Faux$ (Faux))
-$P \leftrightarrow Q$: équivalence (Vrai si les 2 sont vraies ou les 2 sont fausses)
-$P \cup \urcorner P$ est vraie $\boldsymbol{P \cap \urcorner P\ est\ faux}$
- $\urcorner(P \cap Q) \leftrightarrow \urcorner P \cup \urcorner Q$ / $\urcorner(P \cup Q) \leftrightarrow \urcorner P \cap \urcorner Q$ /$(P \to Q) \leftrightarrow \urcorner P \cup Q$ / $\urcorner(P \to Q) \leftrightarrow P \cap \urcorner Q$

Quantification universel

- $\forall x \in E$ ($quelque\ soit\ x \in E$)
-Quantificateur existentiel : $\exists\ x \in E$ (il existe au moins 1 x)
$\exists!\ x \in E$ (il existe 1 unique x)

La negation de "$\forall$ x ∈ E P(x)"est "$\exists x \in E$ ⅂P(x)"
"$\exists$ x∈E P(x) " est "$\forall$ x ∈ E ⅂P(x)"

Raisonnement :

-Contraposé : $\urcorner Q \to \urcorner P$ contraposé de $P \to Q$
-Absurde : $Q \leftrightarrow [\urcorner Q \to (P \cap \urcorner P)]$
-Contre exemple : On trouve un exemple qui ne vérifie pas la proposition.
-Récurrence : "$\exists$ n_0∈N P(n_0) " et "$P(n) \to P(n+1)$"
-Disjonction de cas (raisonner en séparant les différentes éventualités possibles, en d'autres termes, on étudie tout les cas possibles)
-Raisonnement direct : Pour montrer "$P \to Q$" on suppose que P est vrai et on montre Q

2-Ensemble .

-$F \subset$ E $\forall x \in F$, $x \in E$
-$F = E$ si $F \subset E$ et $E \subset F$
- si $F \cap E = \emptyset$ donc ensemble disjoint
-$E \backslash F \leftrightarrow x \in E$ $et\ x \notin F$
-$C_E.F \leftrightarrow x \notin F$ (complémentaire de F)
- $x \notin C_E.F \leftrightarrow x \in F$
- F $\cap C_E.F = \emptyset$
-$C_E(C_E.F) = F$-
-$C_E E = \emptyset$
- $C_E \emptyset = E$
-$E \Delta F = (E \backslash F) \cup (F \backslash E) = (E \cup F) \backslash (E \cap F)$
-$C_E(A \cap B) = C_E A \cup C_E B$
-$\boldsymbol{A \subset B \to C_E B \subset C_E A}$
-$A \cap B = \emptyset \leftrightarrow A \subset C_E B \leftrightarrow B \subset C_E A$
-$P(E) \neq 0$
-$E \times F = \{(x;y)\ ; x \in E\ \ et\ y \in F\} \backslash$
-A$\cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
-A$\cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

MOUVEMENT DE L'ESIB SOLIDAIRE

Chapitre 2 : Application et Relation binaires.

(E, F, Γ) ; $f: E \to F$ / $x \to f(x)$

-$\forall x, x' \in E$, $x = x' \to f(x) = f(x')$ ou -$\forall x, x' \in E$, $f(x) \neq f(x') \to x \neq x'$

- Deux applications sont égales : même ensembles de départ et d'arrivé.

-Ensemble des applications $E \to F$: F^E

-Composée $g \circ f = g(f(x)) : E \to_f F \to_g G$ **Remarque :** $\boldsymbol{g \circ f \neq f \circ g}$

-Application identité : Id_E $E \to E$ (**NB** $\boldsymbol{Id_R : x = y}$)

-$h \circ (g \circ f) = (h \circ g)f$

-$Id_F \circ f = f \circ Id_E = f$

-Restriction : $f|_A : A \to F$ / $x \to f|_A(x) = f(x)$

-Prolongement : $f: A \to F$; $g: E \to F$ / $g(x) = f(x)$ $sur\ A$; $g|_A = f$

Injectivité.

$\forall x, x' \in E$ si $f(x) = f(x') \to x = x'$ (y possède au plus un antécédent).

-f et g : injectives $\to$ $g \circ f$: injective.

-$g \circ f$ injective $\to$ f injective.

Surjectivité.

$\forall y \in F$, $\exists x \in E$; $f(x) = y$ (y possède au moins un antécédent).

[Γ : $\exists y \in F$; $\forall x \in E$; $f(x) \neq y$]

-g et f : surjective $\to$ $g \circ f$: surjective.

-$g \circ f$: surjective $\to$ g : surjective

Bijectivité.

$\forall y \in F$, $\exists! x \in F$, $f(x) = y$ (y possède exactement 1 antécédent) Id_F : bijective.

-f : bijective $\to$ f: surjective et injective

-f: bijective $\to g \circ f = Id_E$ et $f \circ g = Id_F$ et g unique : $F \rightleftarrows_f^g E$

-gf: bijective $\to$ f: injective et g: surjective

Application Réciproque.

f^{-1} : $\forall x \in E$, $\forall y \in F$, $y = f(x) \leftrightarrow f^{-1}(y) = x$

-$f \circ f^{-1} = Id_F$ et $f^{-1} \circ f = Id_E$

-f : bijective $\to$ f^{-1} : bijective et $(f^{-1})^{-1} = f$

-f , g 2 applications bijectives $\to g \circ f$: bijective $\to$ $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

Image Directe.

$f(A) = \{f(x) ; x \in A\}$; $\{y \in F ; \exists x \in E ; y = f(x)\}$

-$\exists x \in A ; y \in f(x)$ si $A \neq \emptyset$ alors $f(A) \neq \emptyset$

-Image de f : $Im(f) = f(E) = \{f(x) ; x \in E\} = \{y \in F ; \exists x \in E ; y = f(x)\}$

-f est surjective ssi $Im(f) = F$

Image réciproque.

-$f^{-1}(B) = \{x \in E ; f(x) = B\}$ $f^{-1}(B) \subset E$

-$f^{-1}(y) \neq f^{-1}(y)$ sauf si f bijective ; $x \in f^{-1}(B) \leftrightarrow f(x) \in B$

-$A \subset f^{-1}(f(A))$ et $f(f^{-1}(B)) \subset B$

-Si f surjective : $f(f^{-1}(B)) = B$ et f injective $f^{-1}(f(A)) = A$

Relation binaire (xRy)

- Réflexivité: $\forall x \in E, xRx$
- Symétrie: $\forall x, y \in E, xRy \to yRx$
- Antisymétrie: $\forall x, y \in E, xRy\ et\ yRx \to x = y$
- Transitivité: $\forall x, y \in E, xRy\ et\ yRz \to xRz$

MOUVEMENT DE L'ESIB SOLIDAIRE

Ensemble relation	Réflexives	Symétriques	Antisymétriques	Transitives
R $=$	√	√	√	√
R $\leq$	√	X	√	√
R $<$	X	X	√	√
Z $\setminus$	√	X	X	X
N $\setminus$	√	X	√	√
P(E) $\subset$	√	X	√	√

-Relation d'équivalence: Réflexive, symétrique, transitive.
-Classe d'équivalence: $\bar{x}$ ou $C_R(x) = \{y \in E \mid yRx\}$
-Ensemble quotient de E par R : Ensemble de toutes les classes équivalentes : $E_R = \{\bar{x}, x \in E\}$

Relation d'ordre: $(E, \leq)$
-Réflexive, Antisymétrique, transitive
-Eléments comparables si : $x \leq y$ ou $y \leq x$
-Si tous les éléments sont comparables 2 a 2 : ordre totale
-Si non: Ordre partiel

Ordre lexicographique $(\leq)$
-$\forall\ (x, y) \in R^2$, $\forall\ (x', y') \in R^2$
-$(x, y) \leq (x', y') \leftrightarrow (x \leq x') ou (x = x' et\ y \leq y')$

Majorant, Minorant: $(E \leq)$, $A \subset E$

- Majorant: M (dans E)$/Majo_E\ A$: $\forall\ x \in A, x \leq M$
- Minorant : m (dans E)$/Mino_E\ A$: $\forall\ x \in A, x \geq m$
- Plus grand élément: $(M) de\ A/max\ A$: $\forall\ x \in A, x \leq M$
- Plus petit élément: $(m)\ de\ A/min\ A$: $\forall\ x \in A, x \geq m$
- Borne supérieure (Plus petit majorant) de A: $(pge = M)$: $M = Sup_E A \leftrightarrow \begin{cases} \forall\ x \in A, x \leq M \\ \forall\ M' \in Majo\ A, M \leq M' \end{cases}$
- Borne inférieure (Plus grand minorant) de A: $(ppe = m)$: $m = Inf_E A \leftrightarrow \begin{cases} \forall\ x \in A, x \geq m \\ \forall\ m' \in Mino\ A, m' \leq m \end{cases}$

La borne supérieure et la borne inferieure ne sont pas nécessairement un élément de A
Soient (E, R) et (F, R') $f: E \to F$
f croissant : $\forall\ x, y \in E, x\ R\ y \to f(x)\ R'\ f(y)$
f décroissant: $\forall\ x, y \in E, x\ R\ y \to f(y)\ R'\ f(y)$

MOUVEMENT DE L'ESIB SOLIDAIRE