Chapitre 2 : Structure algebrique usuelle

I - Loi de composition interne

Une loi de composition interne (lci) sur un ensemble non vide de E et une application de $E \times E$ dans E. Elle est noté $E \times E \to E$

$(x, y) \to x * y$

. Lci les plus courantes : . + dans $\mathbb{N}, \mathbb{N}^*, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ mais pas sur $\mathbb{Z}^*, \mathbb{Q}^*, \mathbb{R}^*, \mathbb{C}^*$

. − dans $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$

. × dans $\mathbb{N}, \mathbb{N}^*, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$

. $\cup$ et $\cap$ definir $P(E)$

propriétés des lois : Soit $*$ et o des lci sur E.

1) $*$ est commutative $\Rightarrow x * y = y * x$ ex : $2+3 = 3+2$ contre exemple : $x^y \neq y^x$

2) $*$ est associative $\Rightarrow (x * y) * z = x * (y * z)$

3) $*$ est distributive % à o $\Rightarrow x * (y o z) = (x * y) o (x * z)$

$\Rightarrow (y o z) * x = (y * x) o (z * x)$

II - Elements Remarquables

1) L'element neutre (e) : $\forall x \in E, e * x = x * e = x$

0 est l'element neutre de +, 1 est l'element neutre de ×, Id_x est l'element neutre de o

- Si e existe, il est unique pour $*$

2) L'element symetrique (ou inverse) de x : $\forall x \in E, \exists y, x * y = y * x = e$, y est noté x^{-1}

$-x$ est l'element symetrique de x de +, $\frac{1}{x}$ est l'element symetrique de ×, la reciproque f^{-1} d'une fonction bijective f est sa symetrique

- Si x^{-1} existe, il est unique
- $(x * y)^{-1} = x^{-1} * y^{-1}$

3) L'element regulier : a est un element regulier $\Rightarrow \forall x, y \in E$ $x * a = y * a \Rightarrow x = y$

$a * x = a * y \Rightarrow x = y$

Dans $(\mathbb{Z}, +)$ tout element et regulier

Dans $(\mathbb{R}, \times)$ tout element non nul et regulier

- Tout element inversible de E et regulier (la reciproque est fausse)

4) Partie stable d'un ensemble : A est stable $\Rightarrow A \subset E, \forall x, y \in A, x * y \in A$

5) Homomorphisme f de E dans F : $f : (E, *) \to (F, o)$ ex : $\ln(a \times b) = \ln a + \ln b$

$f(x * y) = f(x) o f(y)$ $\forall x, y \in F$

- Un homomorphisme de E dans E est appelé endomorphisme
- Un homomorphisme bijectif et dit isomorphisme
- Un endomorphisme bijectif est dit automorphisme.

III - Groupes

1) Définition : Un ensemble E, $(E,*)$ est dit groupe si :

i) $*$ est associative dans E

ii) $*$ admet un élément neutre dans E

iii) Tout élément dans E est symétrisable par la loi $*$

Si $*$ est commutative on dit que $(E,*)$ est commutatif ou abélien

2) Les sous groupes

Soit $(E,*)$ un groupe dont l'élément neutre est noté e.
Une partie $H \subset E$ est un sous groupe de E si :

i) $e \in H$

ii) $\forall x,y \in H$, $x*y \in H$

iii) $\forall x \in H$, on a $x^{-1} \in H$

- Si $(E,*)$ est un groupe et $(H,*)$ un sous groupe de E alors $(H,*)$ est un groupe
- $(H,*)$ est un sous groupe de $(E,*)$ $\Longleftrightarrow$ i) $H \subset E$
  ii) $H \neq \{0\}$
  iii) $\forall x,y \in H$, $x*y^{-1} \in H$
- $\{e\}$ et E sont les sous groupes triviaux de E

3) Morphisme de groupes

- Soient $(E,*)$ et $(E',\circ)$ deux groupe et f une application de E dans E'. f est dite morphisme de groupe si : $\forall x,y \in E \quad f(x*y) = f(x) \circ f(y)$
- Soient e et e' les éléments neutre respectifs de $(E,*)$ et $(E',\circ)$ alors
  - $f(e) = e'$
  - $\forall x \in E \quad f(x^{-1}) = f(x)^{-1}$

- On définit l'image de f tel $Im(f) = \{ f(x), x \in E \} = f(E)$
- On définit le noyau de f tel que $Ker(f) = \{x \in E, f(x) = e'\} = f^{-1}(e')$
- $(Im(f), \circ)$ est un sous groupe de E' et $(Ker(f), *)$ est un sous groupe de E
- f est injective $\Leftrightarrow Ker(f) = \{e\}$
- f est surjective $\Leftrightarrow Im(f) = E'$

IV - Anneaux et corps

1) Structure d'anneau : Un anneau est un ensemble muni de deux loi $(A,+,\times)$ tel que :

i) $(A,+)$ est un groupe abélien

ii) $\times$ est associative

iii) $\times$ admet un élément neutre dans A

iv) $\times$ est distributive par rapport à la loi $+$ (le neutre de A pour $+$ est noté 0 ou 0_A, pour $\times$ 1 ou

- Si $\times$ est commutative, l'anneau $(A,+,\times)$ est dit anneau commutatif
- Si $\times$ admet un élément neutre dans A, l'anneau $(A,+,\times)$ est dit anneau unitaire
- Un élément de A est dit inversible s'il est inversible pour la loi $\times$.

- Soit $(A,+,\times)$ un anneau et soit x, y et z trois element de A alors :

  i) $x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0$

  ii) $x \cdot (-y) = -x \cdot y = -(xy)$

  iii) $x(y-z) = xy - xz$

- Soit $(A,+,\times)$ un anneau et soit $x \neq 0 \in A$. x est dit diviseur de zero s'il existe un element non nul y de A tel que : $xy = 0$ ou $yx = 0$

- Un anneau A est integre s'il est commutatif et :

$$\forall a, b \in A \; [a \cdot b = 0 \Rightarrow a = 0 \text{ ou } b = 0]$$

- a est un element regulier de $(A,+,\times) \Leftrightarrow$ a n'est pas diviseur de zero
- Un anneau commutatif est intègre $\Leftrightarrow$ tout element non nul de A est regulier

2) Les sous anneaux

Soit $(A,+,\times)$. On dit que B est un sous anneau de A si

(i) B est un sous groupe de $(A,+)$

(ii) B est stable par la loi $\times$

(iii) $1_A \in B$ (B est unitaire)

- Si B est un sous anneau de A, alors B est lui meme un anneau
- Si A est commutatif alors tous sous anneau de A est commutatif.

3) Morphisme d'anneau

Une application f d'un anneau $(A,+,\times)$ dans un autre $(A',+,\times)$ est dite morphisme si

(i) $\forall x, y \in A \quad f(x+y) = f(x) + f(y)$

(ii) $\quad f(xy) = f(x)\, f(y)$

(iii) $\quad f(1_A) = 1_{A'}$

- Soit $f\,(A,+,\cdot) \to (A',+,\cdot)$ un morphisme d'anneau. Alors $Im(f)$ est un sous anneau de A'

4) Les corps

Un corps est un anneau $(K,+,\cdot)$ dans lequel tout element non nul est inversible pour $\times$.

- Tout corps est un anneau integre
- Un anneau integre n'est pas forcement un corps
- Si l'anneau est integre et est fini alors c'est un corps
- Sous corps = Sous anneau + Tout element non nul est inverse