Chapitre 1 : primitives

I - Integrale sur un segment

• On appelle subdivision d'un segment $[a,b]$ une suite finie $\sigma = (x_0, x_1, \dots, x_n) \in [a,b]$

• le réel max $(x_{k+1} - x_k)$ est le pas de la subdivision

• Lorsque le pas est constant, il vaut $\boxed{\frac{b-a}{n}}$, subdivision regulière

• Soit σ et σ' dans $[a,b]$ tel que

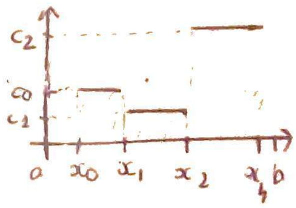
$\sigma = [x_0, x_1, x_2, x_3]$ $\quad\quad$ $\sigma' = [x_0, x_0', x_1, x_2, x_2', x_3]$

On a alors $\sigma \subset \sigma'$. on dit alors que σ' est plus fine que σ

1) Integrale d'une fonction en escalier

Soit f une fonction en escalier sur $[a,b]$. On note $\sigma = (x_0, \dots x_n)$ une subdivision de f.

Ainsi $\boxed{\int_a^b f = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) c_i}$ avec $c_i = f(x_i)$



• Une fonction en escalier est bornée

• $\mathcal{E}([a,b], \mathbb{R})$ est stable par combinaison linéaire et par produit

2) Integrale d'une fonction continue par morceau

Toute fonction continue par morceaux peut être encadrée aussi proche que l'on veut par des fonctions en escaliers

Soit $(\phi_n)_n$ une suite de fonction en escalier et f une fonction continue par morceau sur $[a,b]$ $f \in CM([a,b], \mathbb{R})$ tel que :

$$\sup \left(f(x) - \phi_n(x) \right) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$$

$$\boxed{\left(\int_a^b \phi_n \right)_n \longrightarrow \ell = \int_a^b f}$$

Quand n (nb de subdivision) tend vers $+\infty$ on remarque que $\phi_n(x)$ se rapproche de $f(x)$

a• $\int_a^b f + g = \int_a^b f + \int_a^b g$

b• Si f est à valeur ⊕ alors $\int_a^b f \geqslant 0$

c• Si $f < g$ alors $\int_a^b f < \int_a^b g$

d• $\left| \int_a^b f \right| \leqslant \int_a^b |f|$

e• $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$

f• La valeur moyenne de f sur $[a,b]$ est alors donnée par $\frac{1}{b-a} \int_a^b f$.

- Si f est une fonction continue et de signe constant sur $[a;b]$, alors on a l'équivalence :

$$\int_a^b f = 0 \iff f \text{ est nulle sur } [a,b]$$

- Soit f une fonction continue par morceau sur I et $a, b \in I$ alors :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \begin{cases} \int_a^b f & (\text{si } a < b) \\ 0 & (\text{si } a = b) \\ -\int_b^a & (\text{si } a > b) \end{cases}$$

- Inegalité de Cauchy - Shwartz

Soient f et g deux fonction continues sur $[a,b]$ à valeur réelles on a :

$$\left(\int_a^b fg\right)^2 \leqslant \left(\int_a^b f^2\right)\left(\int_a^b g^2\right) \Rightarrow \left(\int_a^b fg\right) \leqslant \left(\int_a^b f^2\right)^{1/2}\left(\int_a^b g^2\right)^{1/2}$$

- Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et F une primitive de f sur I alors

$$\boxed{\int_a^b f(a)\,da = F(b) - F(a)}$$

II - Calcul d'integral

- Soit $g(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(u)\,dv = \left[F(u)\right]_{u(x)}^{v(x)} = F(v(x)) - F(u(x))$

$$g'(x) = v'(x)\,f(v(x)) - u'(x)\,f(u(x))$$

1) Integration par parties

Soient $f \cdot g : I \to \mathbb{R}$ deux fonction C^1

$$\forall\, a,b \in I \quad \int_a^b u(x)\,v'(x)\,dx = \left[u(x)\,v(x)\right]_a^b - \int_a^b v(x)\,u'(x)\,dx$$

ex : $I = \int_0^\pi x \cos x$

$u(x) = x \qquad v'(x) = \cos(x)$

$u'(x) = 1 \qquad v(x) = \sin(x)$

$$I = \left[x \sin(x)\right]_0^\pi - \int \sin(x)\,dx = \left[\cos(x)\right]_0^\pi = -2$$

2) Changement de variable

$$\forall\, a,b \in J \quad \int_a^b f(u(t))\,u'(t)\,dt = \int_{u(a)}^{u(b)} f(x)\,dx \quad \text{en posant } x = u(t)$$

ex : $I = \int_1 \frac{\sqrt{x}}{x+1}\,dx$ on pose $u = \sqrt{x}$

$u^2 = x$

$2u\,du = dx$

ainsi $I = \frac{u}{u^2+1}\,2u\,du$ et on integre facilement

② : Soit $a \in R$ et $f \in C_M([-a,a], R)$

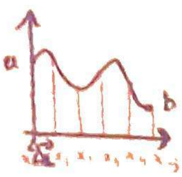
- si f est paire $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$
- si f est impaire $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$
- si f est T-périodique alors $\int_{a}^{a+T} f(x)\,dx = \int_{0}^{T} f(x)\,dx$

3) Somme de Riemann

Soit $f\ C([a,b], R)$

Pour tout entier $n \in N^*$ on appelle somme de Riemann d'ordre n associée à f la somme :

$$S_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{K=0}^{n-1} f\left(a - \left(K\frac{b-a}{n}\right)\right)$$



$\Delta x = \underbrace{\frac{b-a}{n}}$ largeur des rectangle (n = nb de rectangle)

$x_0 = a$

$x_1 = a + \Delta x$

$x_2 = a + 2\Delta x$

$x_3 = a + 3\Delta x$

$\vdots \quad \ldots$

$$\sum_{K=1}^{n} \frac{b-a}{n} f\left(a + \left(K\frac{b-a}{n}\right)\right)$$

4) Soit $f : [a,b] \to R$ continue ; On a $S_n(f) \to \int_a^b f$

5) Si f est de classe C^1 on : $\left| \int_a^b f(x)\,dx - S_n(f) \right| \leq \frac{M(b-a)^2}{n}$ avec $M = \sup|f'(x)|$

ex : $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^4} \sum_{K=1}^{n} K^3 = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{K=1}^{n} \left(\frac{K}{n}\right)^3$

$= \int_0^1 x^3\,dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{4}$

Re 5) Formule de Taylor - lagrange

SP Soit f une fonction C^{n+1} sur $[a,b]$ avec $a < b$

$$f(b) = \sum_{K=0}^{n} \frac{f^{K}(a)}{K!} + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt$$

Th 6) Inegalite de Taylor - lagrange

Soit $f : I \to R$ de classe C^{n+1} et M un Majorant de f^{n+1} sur $[a,b]$

$$\left| f(b) - \sum_{K=0}^{n} \frac{f^{(K)}(a)}{K!} (b-a)^K \right| \leq \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} M$$

III - Recherche des primitives

1) Fonction usuelles

Fonction	$u'u^n$	$\frac{u'}{u}$	$u\,e^u$	$u'\sin u$	$u'\cos u$	$u'\mathrm{ch}(u)$	$u'\mathrm{sh}(u)$	$u'(1-\mathrm{th}^2 u)$	$u'\tan(u)$	$\frac{u'}{1+u^2}$	$\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	$u'(1+\tan^2 u)$
primitive	$\frac{u^{n+1}}{n+1}$	$\ln(u)$	e^u	$-\cos u$	$\sin u$	$\mathrm{sh}(u)$	$\mathrm{ch}(u)$	$\mathrm{th}(u)$	$-\ln(\cos u)$	$\arctan(u)$	$\arcsin(u)$	$\tan(u)$

2) Fraction rationnelles

Pour pouvoir integrer une fraction rationnelle de la forme $f(x) = \frac{A(x)}{B(x)}$ il faut la décomposé en element simple qu'on sait integrer.

Methode :

1) Si $d°(A) > d°(B)$, on fait la division euclidienne de $A(x)$ par $B(x)$ on ecrira alors
$$f(x) = Q(x) + \frac{R(x)}{B(x)}$$ où $Q(x)$ est le quotient de la DE et $R(x)$ est le reste

2) On factorise le denominateur $B(x)$ grâce à ses racine :

$B(\alpha) = 0$, $B(\alpha') = 0$ $\Rightarrow$ $(x-\alpha)(x-\alpha')$ divise $B(x)$

On fait la DE de $B(x)$ par ses facteur

$$\begin{array}{r|l} B(x) & (x-\alpha)(x-\alpha') \\ \hline 0 & C(x) \end{array}$$

On aura un reste 0 et un quotient $C(x)$

Ainsi $$f(x) = Q(x) + \frac{R(x)}{(x-\alpha)(x-\alpha')C(x)}$$ avec $C(x) = x^2 + bx + c$

3) On decompose $\frac{A(x)}{B(x)}$ en element simple de :

1 er espece : $\frac{A_1}{(x-\alpha)}$; $\frac{A_2}{(x-\alpha')}$ où A_1 et $A_2 \in \mathbb{R}$

2 eme espece : $\frac{Bx+C}{x^2+bx+c}$

$$\frac{R(x)}{B(x)} = \frac{A_1}{x-\alpha} + \frac{A_2}{x-\alpha'} + \frac{Bx+C}{x^2+bx+c}$$

4) Pour le calcul de coef A_1, A_2, B, C :

On multiplie par $(x-\alpha)$ et on prend $x = \alpha$ on trouve ainsi A_1

De meme pour A_2.

pour les autre coef, on multiplie par la plus petite puissance qui apparait dans la decomposition (ici x) et on fait tendre x vers $+\infty$

On aura $A_1 + A_2 + B_2 = 0$ ainsi on trouve B_2

et pour C on le trouve a l'aide de valeur particuliere de x (ex pour $x = 0$ ...)

↳ Enfin, Sachant que l'integrale d'une somme c'est la somme des integrale on integre chaque terme grace aux fonction usuelle.

...ction rationnelle en sinus et cosinus

Elle est de la forme $f(t) = \dfrac{\sum_{pq} a_{pq} (\cos t)^q (\sin t)^p}{\sum_{pq} b_{pq} (\cos t)^q (\sin t)^p}$

pour integrer ce type de fonction, on applique la règle de Bioche

* si $f(-t) = -f(t)$ on pose $u = \cos(t)$
* si $f(\pi - t) = -f(t)$ on pose $u = \sin(t)$
* si $f(\pi + t) = f(t)$ on pose $u = \tan(t)$

sinon on pose $u = \tan\left(\frac{t}{2}\right) \Rightarrow \sin(t) = \frac{2u}{1+u^2}$ et $\cos(t)\ \frac{1-u^2}{1+u^2}$

Ainsi on decompose la fraction comme une fraction rationnel et on remplace u par sa valeur à la fin

4) Fraction rationnelle en ch et sh

Soit $f(t) = F(ch(t), sh(t))$ est une fonction rationnel en ch et sh.

Pour integre ce type de fonction, on applique la règle de Bioche.

On pose $g(t) = g(\cos(t), \sin(t))$

- si $g(-t) = -g(t)$ $u = ch(t)$
- si $g(\pi - t) = -g(t)$ $u = sh(t)$
- si $g(\pi + t) = g(t)$ $u = th(t)$
- sinon $u = e^t$

5) Fonction se ramenant aux types precedent

- Une fonction rationnelle en t et $\sqrt{a^2 - t^2}$ s'integre en posant $t = a\sin u$
- " $\sqrt{t^2 - a^2}$ " " $t = a\,ch u$
- " $\sqrt{t^2 + a^2}$ " " $t = a\,sh u$
- " $\sqrt{\frac{at+b}{ct+d}}$ " $u = \sqrt{\frac{at+b}{ct+d}}$

Remarque : fonction reciproque hyperbolique

sh : $y = sh(x) \Leftrightarrow x = argsh(y)$

$argsh'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

$argsh(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$

ch : $y = ch(x) \Leftrightarrow x = argch(y)$

$argch'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

$argch(x) = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$

th : $y = th(x) \Leftrightarrow x = argth(y)$

$argth'(x) = \frac{1}{1-x^2}$

$argth(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$